INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ – IFCE *CAMPUS* FORTALEZA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – PGECM

ANDRESSA GOMES DOS SANTOS

OS ASPECTOS MATEMÁTICOS RELACIONADOS À MÉDIA GEOMÉTRICA QUE EMERGEM A PARTIR DA MANIPULAÇÃO DA ESCALA DOS NÚMEROS (1623) ELABORADA POR EDMUND GUNTER COM LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

FORTALEZA

2022

ANDRESSA GOMES DOS SANTOS

OS ASPECTOS MATEMÁTICOS RELACIONADOS À MÉDIA GEOMÉTRICA QUE EMERGEM A PARTIR DA MANIPULAÇÃO DA ESCALA DOS NÚMEROS (1623) ELABORADA POR EDMUND GUNTER COM LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – *Campus* Fortaleza, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Instituto Federal do Ceará - IFCE
Sistema de Bibliotecas - SIBI
Ficha catalográfica elaborada pelo SIBI/IFCE, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237a Santos, Andressa Gomes dos.
Os aspectos matemáticos relacionados à média geométrica que emergem a partir da manipulação da escala dos números (1623) elaborada por Edmund Gunter com licenciandos em Matemática / Andressa Gomes dos Santos. - 2022.
222 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Campus Fortaleza, 2022.
Orientação: Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira.

1. Média geométrica. 2. Interface entre história e ensino. 3. Formação de professores de Matemática. I. Titulo.

CDD 510.07

ANDRESSA GOMES DOS SANTOS

OS ASPECTOS MATEMÁTICOS RELACIONADOS À MÉDIA GEOMÉTRICA QUE EMERGEM A PARTIR DA MANIPULAÇÃO DA ESCALA DOS NÚMEROS (1623) ELABORADA POR EDMUND GUNTER COM LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) – *Campus* Fortaleza, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 31/01/2022.

BANCA EXAMINADORA

____

Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira (Orientadora)
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

____

Prof. Dr. Fumikazu Saito (Avaliador externo)
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP)

____

Profa. Dra. Bernadete Barbosa Morey (Avaliadora externa)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

À Maria do Socorro Pereira Gomes.

A Sérgio José Ferreira dos Santos (*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

Ao meu pai, Sérgio José Ferreira dos Santos (*in memoriam*), por todo amor, atenção, apoio, incentivo, dedicação e sacrifícios que teve para me proporcionar a melhor educação que podia.

À minha mãe, Maria do Socorro Pereira Gomes, por ser minha inspiração e porto-seguro, sem ela, não teria conseguido. Obrigada por ser a melhor mãe do mundo.

Às minhas amigas Gleiciane e Lívian, por serem as irmãs que não tive.

Aos professores que fizeram parte da minha caminhada.

Às amizades que floresceram nesse período e que levarei para a vida. Obrigada, Naiara e Gisele, por toda força e ensinamentos e Adriana, por ser minha gêmea de mestrado.

Às amigas do grupo de pesquisa, que sempre estiveram à disposição para ajudar e confortar. Isabelle, minha primeira orientadora, devo muito a você, obrigada por ter acreditado em mim e ter me ensinado tantas coisas boas, que me auxiliaram nesse período. À Verusca, por ser tão solícita e um doce de pessoa. À Suziê, por sempre tentar ajudar com a TO.

À minha orientadora, Professora Doutora Ana Carolina Costa Pereira, principalmente, pela paciência que teve comigo quando eu comecei, a todo tempo doado em orientações e seminários. Obrigada por oferecer uma formação de qualidade, não só acadêmica, mas profissional, agradeço pelas festas e por ser essa pessoa iluminada que alegra a todos.

À Professora Doutora Bernadete Barbosa Morey, por compor a banca e pelas orientações durante a escrita da dissertação.

Ao Professor Doutor Fumikazu Saito, por compor a banca. Obrigada pela paciência e por todos os ensinamentos, desde quando eu estava na graduação, escrevendo meu TCC até esse momento. O senhor é uma inspiração para mim.

À Professora Doutora Ana Claudia Mendonça Pinheiro, por compor a banca, por fazer parte da minha trajetória no mestrado e por todos os momentos que partilhamos.

Ao Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática (GPEHM) e aos seus membros, por terem me acolhido ainda na graduação e oportunizado tanta aprendizagem.

Ao Núcleo de Pesquisa em História e Educação Matemática (NUPEHM), por me acolher e oportunizar estudos focados na Teoria da Objetivação.

Ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PGECM), do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), por toda a aprendizagem.

À Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP), pela bolsa de estudos para o desenvolvimento desta pesquisa.

“[...] Uma mente necessita de livros da mesma forma que uma espada necessita de uma pedra de amolar se quisermos que se mantenha afiada” (MARTIN, 2010, p. 92).

RESUMO

Diante dos estudos realizados, com o intuito de aliar a história ao ensino de Matemática, por meio de uma interface, optou-se por uma perspectiva atualizada da escrita histórica, que utiliza uma fonte histórica para, nela, buscar recursos que possam servir como base para o desenvolvimento de atividades. Almejando contribuir com os estudos que aliam história e ensino nessa abordagem, escolheu-se investigar um instrumento matemático descrito no tratado de Edmund Gunter (1581-1626), intitulado *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments, for such as are studious of Mathematicall practise*, de modo a se apropriar da escala dos números inscrita no instrumento *Cross-staff*, para explorar didaticamente a noção de média geométrica. Assim, este estudo tem como objetivo geral conhecer os processos matemáticos envolvendo a média geométrica, que permearam a formação de licenciandos em Matemática a partir do manuseio da escala dos números. Dessa maneira, a pesquisa se caracteriza como qualitativa, de cunho bibliográfico e documental, em que se realizou um levantamento sobre as temáticas relacionadas a este estudo, bem como um tratamento da fonte histórica escolhida. Para o desenvolvimento da atividade, utilizou-se o suporte da Teoria da Objetivação. A esfera contextual foi mobilizada por meio do estudo do tratado, em que se apresentou o contexto de elaboração da obra de Gunter. Também foi realizado um estudo, no âmbito epistemológico, direcionado para a escala dos números. Já a esfera historiográfica perpassa pelos dois momentos anteriores. Foi aplicada uma formação com licenciandos em Matemática para a percepção de saberes matemáticos relacionados à média geométrica, obtendo-se como resultado a mobilização de saberes como logaritmo, geométrica analítica e álgebra, associados à média geométrica. Portanto, contribui-se para a formação de professores de Matemática, com a utilização de recursos provenientes da história, em especial, com a escala dos números para o ensino de média geométrica a partir de articulações com outros âmbitos da Matemática.

Palavras-chave: Média geométrica. Interface entre história e ensino. Formação de professores de Matemática.

ABSTRACT

In view of the studies carried out in order to combine history with the teaching of mathematics through an interface, an updated perspective of historical writing was chosen that uses a historical source to seek resources that can serve as a basis for the development of activities. Aiming to contribute to studies that combine history and teaching in this approach, we chose to investigate a mathematical instrument described in Edmund Gunter's treatise (1581-1626), entitled The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments, for such as are studious of Mathematicall practise, in such a way as to appropriate the scale of numbers inscribed in the Cross-staff instrument to didactically explore the notion of geometric mean. Thus, this study has the general objective of knowing the mathematical processes involving the geometric mean that permeated the formation of undergraduates in Mathematics from the handling of the scale of numbers. In this way, the research is characterized as qualitative with a bibliographic and documentary nature, in which a survey was carried out on the themes related to this study, as well as a treatment of the chosen historical source. As for the development of the activity, the support of the Theory of Objectification was used. The contextual sphere was mobilized from the study of the treaty in which the context of the elaboration of Gunter's work was presented. A study was also carried out in the epistemological scope directed to the scale of numbers. The historiographical sphere, on the other hand, permeates the two previous moments. Training was applied with a degree in Mathematics for the perception of mathematical knowledge related to the geometric mean, resulting in the mobilization of knowledge such as logarithm, analytical geometric and algebra associated with the geometric mean. In this way, it contributes to the training of mathematics teachers with the use of resources from history, especially with the scale of numbers for the teaching of geometric mean from articulations with other areas of mathematics.

Keywords: Geometric mean. Interface between history and teaching. Mathematics teacher training.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Diante das diretrizes curriculares que regem o ensino de Matemática no Brasil, em especial, no Ensino Médio, tem-se a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que direciona as competências e as habilidades que os discentes devem desenvolver em cada um dos níveis escolares.

No que se refere às competências vinculadas ao Ensino Médio, estipularam-se cinco, em que se destaca a terceira competência sobre a utilização de conceitos do âmbito algébrico, geométrico e estatístico para a resolução de problemas e o desenvolvimento do pensamento matemático[1] (BRASIL, 2019). Pelo que traz a BNCC, ao desenvolver essa competência, os alunos serão capazes de mobilizar elementos diversos para resolver um problema.

Em um contexto particular, no que diz respeito às habilidades acerca dessa competência específica, ressalta-se a EM13MAT316[2] sobre as medidas de tendência central como média, moda e mediana, entretanto, não há especificidades de articulação desse elemento da estatística com outros de esferas diferentes, como a geometria e a álgebra.

É no âmbito da tendência central, em especial, da média, que se situa a média geométrica, que, segundo Silva (2019), é pouco explorada e não tem destaque nas situações de aplicação. Nesse sentido, não há como articular vários âmbitos da Matemática em contexto, se um elemento da média não é estudado com esse propósito.

Nesse viés, encontra-se uma possibilidade de mobilizar diversos saberes matemáticos em um único problema por meio da história, uma vez que ela pode promover reflexões que façam emergir aspectos que, normalmente, não são relacionados conjuntamente no ensino de Matemática.

Tendo-se em vista uma perspectiva de aproximação de história e ensino de Matemática, a partir de uma perspectiva historiográfica contemporânea, consultaram-se alguns estudos, como Di Beo (2015); Alves e Pereira (2018); Pereira e Saito (2019a) e Santos e Pereira (2021). Essas pesquisas consideram um instrumento histórico para ser articulado ao ensino. Dessa maneira, percebe-se que a história pode contribuir com o processo de construção do saber

[1] Lê-se, na íntegra, a respeito da competência cinco: “Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente” (BRASIL, 2018, p. 527).

[2] Lê-se, na íntegra, sobre a habilidade: “Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão)” (BRASIL, 2018, p. 529).

matemático, como reforça Beltran (2009), que a história pode favorecer reflexões acerca do desenvolvimento de um determinado conceito.

Nessa perspectiva de aliança entre história e ensino, considerando uma historiografia atualizada, em que se procura entender o processo de elaboração de um dado saber conjecturando o período em que foi desenvolvido, é possível construir uma interface pelo diálogo entre o historiador e o educador matemático. Nesse diálogo, podem surgir interessantes recursos direcionados ao ensino, como um texto, uma imagem ou algum instrumento que envolva um aspecto matemático (SAITO, 2015).

No entanto, para que proposta de interface possa chegar à sala de aula, é preciso que os professores conheçam esse modo de aliar história e ensino de Matemática. É nesse viés que se encaixa a formação de professores, inicial e continuada. E é, na formação docente, que essa interface é desenvolvida.

Contudo, os professores carecem de informação quanto às perspectivas de se abordar a história em sala de aula e de que existem outras maneiras de levar a história ao ensino, além de uma suposta motivação e de forma presentista. A história poderia contribuir para a formação de professores mais do que “[...] apenas uma apropriação significativa e um despertar de interesse pelo conhecimento matemático propriamente dito” (MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 153).

Desse modo, para que a história tenha um papel diferente no ensino, é necessário que os professores conheçam outras formas de abordá-la. Uma opção de apresentar novas perspectivas é por meio da realização de formações complementares, que envolvam outras maneiras de aliar história e ensino. Haja vista que a formação de professores, inicial ou continuada, “[...] exerce grande influência na percepção, construção e organização de diversos saberes docentes, que, de forma conjunta, se manifestarão no ato de ensinar, ou seja, no fazer docente em seu cotidiano” (ALBUQUERQUE; GONTIJO, 2013, p. 78).

Perante a problemática apresentada na formação de professores de Matemática quanto à utilização tradicional da história no ensino, é possível levar à formação inicial uma nova possiblidade de integrar a história ao ensino de Matemática pelas concepções de interface de Saito e Dias (2013), utilizando um recurso histórico, como, por exemplo, um instrumento matemático, para que seja abordado em sala de aula e possa contribuir para a constituição matemática dos alunos.

Diante disso, nasceu o interesse por aliar história e ensino de Matemática por meio da construção de interface, inicialmente, com uma abordagem historiográfica tradicional, ainda no curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual do Ceará – UECE, na realização do Trabalho de Conclusão de Curso, em que se explorou a *Slide rule*, de William Oughtred (1574-1660), comumente conhecida como régua de cálculo linear. Esse estudo apenas visava à articulação da construção da régua de cálculo e seu manuseio, sem o uso do tratado em que o instrumento está contido, para o ensino de multiplicação.

Nesse período, a pesquisadora se aproximou do Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática – GPEHM[3], que estava em parceria com o Grupo de Pesquisa em História e Epistemologia na Educação Matemática – HEEMa[4], o que possibilitou estudos e aprofundamento em relação à interface entre história e ensino na perspectiva historiográfica atualizada.

A partir de leituras e de estudos realizados no grupo, em particular, sobre a Inglaterra no século XVII e os báculos desenvolvidos nesse contexto, deparou-se com a pesquisa de Roche (1981), que aborda esse assunto e traz referências de alguns documentos originais, como o de Edmund Gunter.

Partindo desse estudo, procurou-se pelo tratado de autoria de Edmund Gunter, que trazia, dentre outras coisas, a descrição de um *Cross-staff*, encontrou-se, então, *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments, for such as are studious of Mathematicall practise*. Através de uma leitura panorâmica, observou-se que esse documento aborda inúmeros temas que envolvem Matemática.

No que se refere à escolha da fonte histórica, outros critérios foram utilizados, além do pessoal, os quais foram determinados no estudo de Silva e Pereira (2021), em que são elaborados sete critérios para a seleção da fonte histórica a ser levada para a sala de aula. Um fato positivo desse tratado é o idioma no qual foi escrito, o inglês, que facilita a compreensão, além disso, foi uma obra desenvolvida no século XVII, na Inglaterra, onde estava acontecendo uma grande expansão dos saberes em relação à Matemática prática.

Assim, dada a motivação pelo estudo inicial sobre a *Slide rule*, de Oughtred, que foi elaborada no mesmo período do tratado de Gunter, percebendo-se a importância desse momento na Inglaterra e a possibilidade de usar esse tratado na formação de professores, optou-se por estudar, dentre as diversas escalas do instrumento *Cross-staff*, as escalas que estavam relacionadas à efetuação de cálculos aritméticos, especialmente, a escala dos números.

O *Cross-staff*, que Gunter (1623) traz em seu tratado, é composto por duas hastes, o *staff* e o *cross*, em que ficam dispostas três miras utilizadas para medições de distâncias e alturas, ele é composto por 12 escalas, sendo cinco inscritas no *cross* e sete no *staff*. Esse instrumento

---

[3] Para mais informações, acesse: http://gpehm.blogspot.com/.
[4] Para mais informações, acesse: https://heemaweb.wordpress.com/.

se diferenciava dos demais elaborados até o século XVII, pois Gunter desenvolveu um conjunto denominado de escalas das proporções, composto por quatro escalas inéditas inscritas no *staff*, a escala dos senos artificiais, das tangentes artificiais, dos senos versados e dos números, que podem ser manuseadas apenas com o auxílio de um compasso.

Nesta pesquisa, optou-se por estudar apenas o *staff*, desenvolvido por Gunter (1623). Dentre as sete escalas que compõem essa parte do instrumento, foi selecionado o conjunto das escalas das proporções, em particular, a escala dos números, que mobiliza, em seu rol de potencialidades, a média geométrica, que é foco deste estudo.

Consequentemente, o estudo se concentra em uma proposta de articulação de história e ensino de Matemática para a formação de professores sob uma perspectiva historiográfica atualizada, seguindo as concepções de Saito e Dias (2013) como forma de agregar recursos didáticos ao ensino de Matemática.

Nesse corpo, como forma de verificar o estudo que está sendo realizado e fundamentá-lo diante das pesquisas já realizadas nesses aspectos, foi feita uma busca de pesquisas na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD, que pudessem dialogar com as temáticas que permeiam este estudo.

Dentre as pesquisas que envolvem interface entre história e ensino em uma perspectiva atualizada na formação de professores de Matemática, não se encontrou nenhuma que se alinhasse especificamente ao que é proposto aqui, ou seja, nenhuma pesquisa relacionava um recurso histórico com foco em desenvolver concepções sobre média geométrica, entretanto, há pesquisas que tratam de assuntos similares.

A pesquisa, nos repositórios, foi feita no dia 23 de novembro de 2021 e foram utilizadas aspas para a procura de termos compostos, para que se localizasse o termo completo e não só palavras em diferentes contextos. Nessa coleta de pesquisas, foram estipulados dois critérios: pesquisas que estivessem de acordo com o direcionamento deste estudo a partir do título da pesquisa, do resumo, das palavras-chave e que tivessem sido realizadas a partir de 2016, pois, segundo Pereira e Saito (2018), foi quando a maioria dos estudos contendo uma historiografia atualizada começaram a ser publicados.

Na pesquisa da palavra-chave "média geométrica", foram retornados 45 estudos; em "interface entre história e ensino", foram obtidos 12 estudos e em "formação de professores de matemática", foi retornado um total de 145 estudos.

Contudo, ao fazer a leitura do título, do resumo e das palavras-chave dos estudos encontrados, considerando a interseção dos assuntos que se pretende abordar: formação de professores de Matemática, perspectiva atualizada no que se refere à interface entre história e ensino e média geométrica, nenhum estudo foi encontrado.

Todavia, cinco pesquisas – Batista (2018), Oliveira (2019), Albuquerque (2019), Alves (2019) e Martins (2019) – abordam uma proposta atualizada de interface entre história e ensino na formação de professores de Matemática. Dentre essas pesquisas, apenas a de Albuquerque (2019), Alves (2019) e Martins (2019) tratam sobre algo próximo ao que é proposto neste estudo, já que se apropriam de instrumentos de cálculo.

Batista (2018) trata da balhestilha, contida no documento *Chronographia Reportorio dos tempos...*, publicado em 1603, de autoria de Manoel de Figueiredo (1568-1622) e se apropria de pressupostos da construção de interface entre história e ensino. A autora busca conhecer as potencialidades didáticas pela mobilização de conhecimentos trigonométricos e geométricos por meio da construção e do uso do instrumento na formação de professores e apresenta o contexto histórico do documento, a construção da balhestilha, a metodologia e a análise dos dados coletados no curso de extensão, que foi realizado para formação docente. O estudo teve como resultado a percepção de potencialidades didáticas, que podem ser exploradas na construção de atividades para serem aplicadas no ensino de Matemática.

O outro estudo é o de Oliveira (2019), que versa sobre o instrumento jacente no plano, contido na obra de Pedro Nunes (1502-1578), intitulada *Petri Nonii Salaciensis*, de 1566 e traz como os conhecimentos mobilizados por esse instrumento podem contribuir para o ensino e a aprendizagem de conceitos geométricos na formação de professores. Assim, concluiu-se que alguns conceitos geométricos são utilizados na construção e no manuseio do jacente no plano e esses podem favorecer a ressignificação de alguns saberes matemáticos.

Por mais que esses dois estudos não tenham feito uso de instrumentos de cálculo, é importante ressaltá-los pelo uso de uma fonte histórica e de um instrumento para navegação, além de serem pesquisas apoiadas na interface entre história e ensino de Matemática sob um olhar historiográfico atualizado.

Logo, das cinco pesquisas, apenas três estão voltadas para aspectos de aritmética e de cálculos com instrumentos históricos, perspectiva que se aproxima do tema deste estudo. A primeira é a de Albuquerque (2019), que caminha no sentido da apropriação de um tratado para estudo de alguns conceitos aritméticos, que podem construir e/ou reconfigurar um conhecimento matemático. O tratado escolhido, para isso, foi o *Traité de Gerbert* (1843), de autoria de Gerbert de Aurilac (946-1003). A pesquisa foi direcionada para a formação de professores para percepção de alguns conceitos mobilizados a partir do ábaco, que é trazido no documento histórico. Com isso, a pesquisa teve como resultado, a partir dos algoritmos sobre multiplicação trazidos no tratado, juntamente com a utilização do ábaco, uma possível ressignificação de conceitos matemáticos pelos participantes do curso de extensão realizado para a pesquisa.

Já a pesquisa de Alves (2019) discorre de maneira análoga à anterior. Esse estudo traz o instrumento círculos de proporção, de William Oughtred, trazido no tratado de 1633, intitulado *The Circles of Proportion and The Horizontal Instrument.* Portanto, além dessa pesquisa ter relação com a interface entre história e ensino, também trata sobre um instrumento de cálculo para realizar operações aritméticas e tem foco em como os conhecimentos matemáticos incorporados nos círculos de proporção são mobilizados no manuseio do instrumento na formação de professores. Foram destacados alguns conhecimentos emergidos da manipulação desse artefato, como conceitos de seno, cosseno, tangente e logaritmo. Foi, através de um curso de extensão, que se pôde concluir que esses conhecimentos percebidos podem ser potencialmente didáticos para reconfigurar alguns saberes matemáticos.

Por outro lado, Martins (2019) abordou, em seu estudo, as barras de Napier, desenvolvidas por John Napier (1550-1617), contidas no tratado *Rabdologiae* (1617) e procurou conhecer a articulação entre história e ensino da Matemática presente nesse instrumento, de acordo com a fonte histórica. Por meio de um curso de extensão, foi observado que, a partir da manipulação do instrumento, houve uma ressignificação dos conhecimentos acerca da operação de multiplicação. Destarte, o estudo teve como conclusão que o tratado possibilitou a mobilização de conhecimentos matemáticos por intermédio de atividades didáticas.

Esses estudos denotam como se formula a utilização do tratado histórico em uma perspectiva atualizada para a construção de uma interface na formação de professores de Matemática. Todos procuram uma questão matemática proveniente do estudo do documento original, escolhido juntamente com o instrumento que mobiliza diferentes saberes matemáticos.

Como dito anteriormente, ainda não há um número expressivo de pesquisas que envolvam esses assuntos e nenhum voltado para a média geométrica, assim, o estudo proposto aqui tem o intuito de contribuir com essas temáticas. Percebeu-se que não há pesquisas nacionais que utilizem a escala dos números, contida no tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments…*, do estudioso Edmund Gunter, para o ensino de média geométrica e que empreguem o instrumento na formação de professores com apropriação de um estudo contextual, historiográfico e epistemológico para a construção da interface entre história e ensino.

Com isso, tendo em vista a importância da formação de professores e uma construção de interface, tendo como suporte a escala dos números de Gunter e o tratado que a retrata, tem-se a seguinte pergunta norteadora da pesquisa: de que forma os saberes matemáticos envolvendo média geométrica emergem a partir do manuseio da escala dos números com licenciandos em Matemática?

Desse modo, elaborou-se como objetivo geral: conhecer os processos matemáticos envolvendo a média geométrica, que permearam a formação de licenciandos em Matemática a partir do manuseio da escala dos números.

Especificamente, delimitaram-se quatro objetivos para orientar o estudo:

- Conhecer os aspectos contextuais, historiográficos e epistemológicos da elaboração do tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments...*, publicado em 1623, da escala dos números e dos seus saberes incorporados;
- Identificar as potencialidades didáticas relacionadas à construção e ao manuseio da escala dos números para o ensino de Matemática;
- Criar uma atividade baseada na Teoria da Objetivação para o estudo de média geométrica, mediante a manipulação de média proporcional com a escala dos números;
- Descrever, por meio de uma análise semiótica, os processos matemáticos vinculados à média geométrica, proporcionados perante o manuseio da média proporcional com a escala dos números a partir da atividade construída com base na Teoria da Objetivação.

Já no que se refere à metodologia da pesquisa, caracterizou-se em uma pesquisa qualitativa, de cunho documental, pelo uso da obra original *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments…*, a edição utilizada é a de 1623 e foi feita uma tradução do inglês do século XVII para o português. Também se caracteriza como pesquisa bibliográfica, pelo uso de estudos secundários para fundamentar a pesquisa (CRESWELL, 2007; KRIPKA; SCHELLER; BONOTTO, 2015).

A condução do estudo está pautada na interface entre história e ensino sob uma visão historiográfica atualizada, seguindo os preceitos de Saito e Dias (2013), que propõem um estudo das três esferas de análise[5] – contextual, historiográfica e epistemológica – do tratado, como forma de conhecer o tratado e dele fazer emergirem algumas potencialidades didáticas, que

[5] Para mais detalhes, consulte Alfonso-Goldfarb (2008); Ferraz, Alfonso-Goldfarb e Waisse (2013).

propiciem a produção de uma atividade fundamentada nos preceitos e na estruturação da Teoria da Objetivação, que será aplicada em uma formação com licenciandos em Matemática.

Dessa maneira, a pesquisa é composta por sete capítulos, cujo primeiro traz esta introdução sobre o tema do estudo, bem como apresenta as pesquisas que abordam aspectos relacionados a essa dissertação, a problemática e a justificativa de se realizar este estudo, além de trazer a pergunta norteadora do estudo, os objetivos – geral e específicos – e a metodologia de pesquisa.

O segundo capítulo revela o contexto do tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments…*, enfatizando o período no qual ele foi desenvolvido, atentando-se ao contexto de elaboração do tratado no que diz respeito ao que estava em pauta na época acerca dos estudos matemáticos e as influências para que o tratado fosse elaborado naquele cenário social da Inglaterra no século XVII.

O terceiro capítulo desenvolve-se tendo em vista os preceitos epistemológicos da escala dos números, elaborada por Gunter (1623), haja vista que, nessa etapa da pesquisa, discorrer-se-á sobre um estudo das questões matemáticas contidas nessa escala. Assim, essa sessão conta com uma breve descrição do instrumento *Cross-staff* e se atenta à construção da escala dos números e à descrição da sua manipulação, para encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua e obter a média proporcional de dois números.

O capítulo quatro apresenta, de modo panorâmico, os aspectos principais da interface entre história e ensino de Matemática adotada neste estudo e as potencialidades didáticas advindas do estudo da escala dos números, no que diz respeito à descrição, à construção e ao manuseio de proporção contínua e média proporcional.

O capítulo cinco expõe o caminho metodológico, em que se apresenta a Teoria da Objetivação e a estrutura que ela dispõe para a construção da atividade. Em seguida, foi exposta a atividade construída com base nessa teoria e o planejamento da formação realizada com licenciandos de Matemática, da Universidade Estadual do Ceará.

O capítulo seis apresenta a análise dos dados coletados na formação. Essa parte da pesquisa contém as discussões das informações obtidas na formação e a delimitação dos saberes matemáticos, que foram mobilizados pelos participantes a respeito da média geométrica por meio de uma análise semiótica dos dados.

O capítulo sete traz as considerações finais deste estudo, com a apresentação das conclusões advindas desta pesquisa, que trazem à tona como os objetivos foram alcançados, a resposta da questão diretriz e as perspectivas futuras para este estudo.

O próximo capítulo conta com a conjuntura na qual o tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments…* foi elaborado, aborda alguns aspectos de Londres, no século XVI e XVII, em relação à fonte histórica e ao autor do tratado, Edmund Gunter, e os estudo que, de alguma maneira, influenciaram-no.

2 A INGLATERRA NO SÉCULO XVII: AS MATEMÁTICAS E EDMUND GUNTER

O século XVII, especificamente na Inglaterra, foi marcado por um grande interesse ligado ao estudo das matemáticas, principalmente, voltadas às práticas. Naquele período, diversos instrumentos foram difundidos na Europa e muitos tratados matemáticos foram desenvolvidos, em particular, destaca-se o *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments…*, de autoria de Edmund Gunter, publicado, em sua primeira versão, em 1623, apresentava quatro instrumentos, Setor, *Cross-staff*, *Cross-bow* e Quadrante.

Neste capítulo, apresenta-se o contexto de elaboração do tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments…*, em que, no primeiro momento, foi retratado um pouco sobre como Londres estava em destaque em relação à disseminação das matemáticas e no desenvolvimento de instrumentos, além de tratar sobre o percurso acadêmico de Edmund Gunter. Em seguida, são apresentados os estudos realizados por Gunter e sua relação com outros estudiosos da época, por fim, foi realizada uma descrição do seu tratado publicado em 1623.

2.1 Londres no século XVII

A Inglaterra (Figura 1) é um território banhado pelo mar, sua metrópole mais notável, em questões políticas, culturais, religiosas e econômicas, é Londres, situada na região sudeste do rio Tâmisa, que passa pela cidade. Sua localização pode ter influenciado no seu avanço comercial e populacional, sendo, em 1600, a segunda maior cidade da Europa e com grande número de imigrantes (HARKNESS, 2007).

Figura 1 – Território da Inglaterra

Fonte: Paterson (1785, s/p).

Nesse contexto de avanços populacionais, no reinado de Elizabeth I, coroada no ano de 1559, Londres passou por grandes expansões, tanto comercial quanto científica. Nesse período,

> [...] os elisabetanos apoiavam a ciência prática e ofereciam vários incentivos atraentes aos matemáticos ingleses para se dedicarem a ela. Por um lado, a sociedade elisabetana ofereceu-lhes a oportunidade de ganhar a vida com matemática aplicada, por meio de patrocínio, emprego em uma empresa comercial no exterior ou no comércio de livros. Além disso, como certas áreas da matemática prática - acima de tudo, matemática da navegação - estavam ligadas à política e ao bem-estar da nação, os elisabetanos incentivaram o serviço nessas áreas, tornando-o um dever patriótico (ROSS, 1975, p. 49, tradução nossa)[6].

Assim, o estudo das matemáticas, no século XVI, na Inglaterra, teve caráter prático, com incentivos àqueles que estudassem sobre esse assunto, especialmente, a respeito da Matemática voltada para a navegação. Além disso, o comércio teve grande desenvolvimento nessa época, ainda no reinado de Elizabeth I, um notório centro comercial foi criado em Londres por Sir Thomas Gresham[7] (1519-1579), chamado de Royal Exchange.

Thomas Gresham propôs que fosse construído um local, em Londres, onde os comerciantes pudessem se reunir para fazer transações comerciais diariamente. Portanto, em 7

---

[6] Lê-se no original: "[...] the Elizabethans were supporters of practical science, and offered a number of attractive inducements to English mathematicians to devote themselves to it. For one thing, Elizabethan society offered them the opportunity to earn their living in applied mathematics, through patronage, employment with an overseas trading company, or in the book trade. Also, because certain areas of practical mathematics - above all, navigational mathematics - were tied to the policy and well-being of the nation, the Elizabethans additionally encouraged service in these areas by making it a patriotic duty" (ROSS, 1975, p. 49).

[7] Lê-se em inglês: Sir Thomas Gresham foi um famoso conselheiro financeiro da Rainha Elizabeth I, ele fazia parte de uma família tradicional inglesa e era uma personalidade londrina influente (JOHNSON, 1940).

de junho de 1566, foi iniciada a obra do prédio do Royal Exchange, que fora fundado em 1569 e se tornaria fundamental para o desenvolvimento da Matemática prática da Inglaterra no século XVII (WILSON, 1844).

Outro aspecto, que incentivou e divulgou ainda mais os estudos voltados para as matemáticas, foi a imprensa, ela permitiu que os estudos sobre as matemáticas, no século XVI e XVII, na Inglaterra, tornassem-se mais acessíveis por não dependerem de cópias manuscritas, esses documentos direcionados para as matemáticas continham tópicos sobre geometria, aritmética e astronomia[8] (JOHNSTON, 1995).

Por conta da sua notória expansão, a Inglaterra estava envolvida em uma grande diversidade de pessoas vindas de outros países com outras culturas e com uma compreensão diferente sobre as matemáticas. Além disso, o conhecimento matemático, presente naquele período, dá indícios de estar enraizado em uma interpretação geométrica da Matemática e em um caráter prático. Desse modo, o papel dos instrumentos matemáticos foi fundamental (CORMACK, 2017a; HIGTON, 1996).

Os instrumentos estavam inseridos em diversos âmbitos da sociedade inglesa, inclusive na navegação, com isso, “[...] mercadores e investidores londrinos buscaram a expertise da navegação estrangeira como meio de reestruturar e expandir o comércio ultramarino da Inglaterra” (ASH, 2004, p. 86, tradução nossa)[9]. Esse desenvolvimento na navegação ocorreu em meados do século XVI, haja vista a colaboração de Elizabeth I para esses estudos.

Já no início do século XVII, a Inglaterra estava passando por uma expressiva transição política. Nesse período, dava-se fim à dinastia Tudor, pois James Charles Stuart (1566-1625), que era o rei James VI da Escócia, assumira o trono inglês, que pertencia à Elizabeth I (1558-1603), em 1603, iniciando a dinastia Stuart, com James I governando até sua morte em 1625 (NANGONOVÁ, 2008; STATER, 2002).

Entretanto, as características da Inglaterra elizabetana perpetuaram até o século XVII no governo de James I, em que “[...] Londres foi o centro da educação matemática[10] vernácula na Inglaterra, bem como o centro de publicação de estudos matemáticos e fabricação de instrumentos” (HARKNESS, 2007, p. 98, tradução nossa)[11]. Vale ressaltar que os estudos sobre

---

[8] Estudos sobre esses assuntos podem ser encontrados em Digges (1573); Hood (1598); Recorde (1618) e Delamain (1633).

[9] Lê-se em inglês: “London merchants and investors sought out foreign navigational expertise as a means of restructuring and expanding England’s overseas trade” (ASH, 2004, p. 86).

[10] A Educação Matemática, que conhecemos hoje, ainda não estava instituída no século XVII, ainda predominava o ensino do *Trivium* (Retórica, Gramática e Lógica) e do *Quadrivium* (Astronomia, Música, Geometria e Aritmética) (SAITO, 2015; QUEIROZ, 1999).

[11] Lê-se no original: “[...] London was the center of vernacular mathematical education in England, as well as the center of mathematics publishing and instrument making” (HARKNESS, 2007, p. 98).

as matemáticas tiveram apoio de alguns cidadãos influentes de Londres, o que possibilitou o financiamento de trabalhos sobre esse assunto; decorrente da demanda ocasionada por estudos voltados às práticas, foi criado um lugar onde se pudesse abrigar temas voltados para esse âmbito da necessidade inglesa.

Com essa demanda e com o sucesso do seu centro comercial, Royal Exchange, Thomas Gresham

> Profundamente desapontado nos últimos anos com a perda de seu filho e herdeiro, Gresham providenciou a fundação de uma inovadora instituição educacional para perpetuar o seu nome. Os principais objetivos deste *College* eram fornecer ensino, principalmente em disciplinas práticas como física, astronomia e geometria, que seriam úteis especialmente para os cidadãos de Londres que estivessem envolvidos no comércio e comércio marítimo (AMES-LEWIS, 2016, p. 20, tradução nossa)[12].

Assim, foi fundado, em 1597, o Gresham College (Figura 2), que tinha como foco ter palestras em sete disciplinas[13], em especial, em relação ao *Quadrivum*, sobre Astronomia e Geometria, pois esses assuntos ainda não tinham sido estabelecidos nem em Oxford nem em Cambridge (HARTLEY; HINSHELWOOD, 1961). No que se refere a essas disciplinas: “A geometria deveria incluir aritmética, bem como geometria teórica e geometria prática; a astronomia também incluiria os princípios da esfera e as "teorias" dos planetas, bem como o uso do astrolábio e do *staff*, e outros instrumentos comuns para a capacidade dos marinheiros” (MCKIE, 1960, p. 4, tradução nossa)[14].

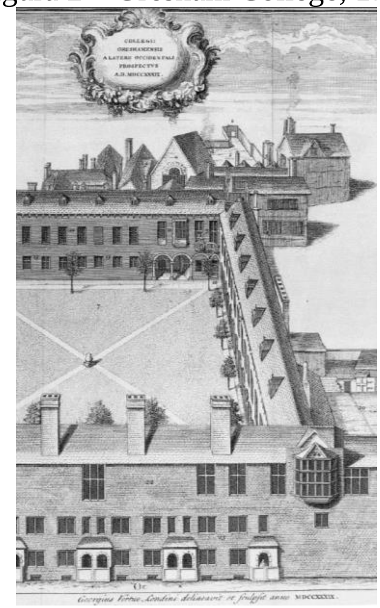
---

[12] Lê-se em inglês: “Deeply disappointed in later years by the loss of his son and heir, Gresham made arrangements for the foundation of an innovative educational institution to perpetuate his name. The principal objectives of this College were to provide teaching notably in such practical subjects as physic, astronomy and geometry that would be of use especially to citizens of London who were involved in maritime trade and commerce” (AMES-LEWIS, 2016, p. 20).

[13] No século XVI, ainda não havia a distribuição das disciplinas tal qual temos atualmente. As palestras realizadas no Gresham College estavam relacionadas aos assuntos de divindade, direito civil, física, retórica, astronomia, geometria e música (CHARTRES; VERMONT, 1998).

[14] Lê-se em inglês: “Geometry was to include arithmetic, as well as theoretical geometry and practical geometry; astronomy likewise would include the principles of the sphere and the ‘theoriques’ of the planets, as well as ‘the use of the astrolabe and the staff, and other common instruments for the capacity of mariners’” (MCKIE, 1960, p. 4).

Figura 2 – Gresham College, 1739



Fonte: Ames-Lewis (2016, s/p).

Observa-se, no Quadro 1, a relação de professores de Astronomia e de Geometria desse *College* entre os anos de 1596 a meados de 1650. Percebe-se que muitos estudiosos ocuparam o cargo de professor desses assuntos.

Quadro 1 – Professores de Astronomia e Geometria do Gresham College

Disciplina	Professor	Permanência no *College*
Astronomia	Edward Brerewood	1596 – 1613
	Thomas Williams	1613 – 1619
	Edmund Gunter	1619 – 1626
	Henry Gellibrand	1626 – 1636
	Samuel Foster	Janeiro de 1636 – novembro de 1636
	Mungo Murray	1637 – 1641
	Samuel Foster	1641 – 1652
Geometria	Henry Briggs	1596 – 1620
	Peter Turner	1620 – 1630
	John Greaves	1630 – 1643
	Ralph Button	1643 – 1648
	Daniel Whistler	1648 – 1657

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

Alguns deixaram o Gresham College ao aceitarem o convite de ministrar aulas em outras universidades, como Cambridge e Oxford, que tinham prestígio já consolidado na sociedade londrina, e outros faleceram no período em que estavam no *College* (WARD, 1740; TAYLOR, 1968; FEINGOLD, 1984).

Reforça-se que o Gresham College era um local onde eram realizadas “[...] palestras para diversas artes dotadas de forma tão livremente, que se fosse além-mar, [o *college*] poderia muito bem passar por uma universidade” (HACKETT, 1833, p. 21, tradução nossa)[15]. Inclusive, nesse período, alguns estudos sobre as matemáticas em difusão, no ocidente latino, eram desconhecidos nas universidades de Oxford e Cambridge.

Ainda em funcionamento, o Royal Exchange teve grande contribuição para o financiamento do Gresham College, já que Thomas Gresham, em seu testamento,

> [...] deixou para sua esposa durante toda a vida o desfrute do uso da Gresham House e dos aluguéis das lojas no Royal Exchange. Quando ela morreu, ambos foram transferidos em custódia para a Corporação e para a Companhia dos Mercadores para a fundação do *College* e para o alívio da pobreza na cidade (HATLEY; HINSHELWOOD, 1961, p. 127, tradução nossa)[16].

Assim, tanto a casa da família Gresham como os lucros do Royal Exchange arcaram com as despesas desse centro de ensino, que aliava a Matemática teórica, tal como era ensinada em Oxford e Cambridge, às práticas matemáticas, que já estavam sendo discutidas em palestras e nas oficinas de instrumentos em Londres. Dessa forma, foi possível convidar professores das universidades para ministrar palestras no Gresham (HAVIL, 2014). Posteriormente, em 1661, com a decisão de aumentar o número de participantes da Royal Society, o Gresham College abrigou as reuniões e seus membros por quase 50 anos (HARTLEY; HINSHELWOOD, 1961).

A criação do Gresham College, as condições sociais e econômicas, as possíveis palestras promovidas por Thomas Hood em Londres e a contribuição de John Dee com seus estudos potencializaram que alguns conhecimentos passassem a ser discutidos pela Inglaterra. Cormack (2017b, p. 74, tradução nossa)[17] destaca que,

---

[15] Lê-se no original: “[…] Lectures for several arts endowed so liberally, that if it where beyond sea, it might well pass for an university” (HACKETT, 1833, p. 21).

[16] Lê-se em inglês: “[…] left to his wife for her lifetime the enjoyment of the use of Gresham House and the rents from the shops in the Royal Exchange. On her death both passed in trust jointly to the Corporation and the Mercers' Company for the foundation of the College and for the relief of poverty in the city” (HATLEY; HINSHELWOOD, p. 127).

[17] Lê-se em inglês: “While some historians have questioned what happened at Hood’s lectures (or if indeed they did happen), this larger evidence indicates both that there were such lectures, and that a number of leaders of the community, as well as mathematical practitioners like Hood, thought they were important in creating mathematical literacy and conversation in the City of London. This was the beginning of a recognition of the power of mathematics for understanding the answers to practical problems and with it, a sense that mathematical answers were as legitimate as philosophical ones” (CORMACK, 2017b, p. 74).

> Embora alguns historiadores tenham questionado o que aconteceu nas palestras de Hood (ou se de fato aconteceram), esta evidência maior indica tanto que houve tais palestras, e que vários líderes da comunidade, assim como os matemáticos como Hood, pensaram que eram importantes na criação da alfabetização matemática e conversação na cidade de Londres. Este foi o início de um reconhecimento do poder da matemática para a compreensão de respostas para problemas práticos e com isso, uma sensação de que as respostas matemáticas foram tão legítimas quanto as filosóficas.

O encorajamento da coroa para o estudo das matemáticas e os esforços de algumas personalidades londrinas, como John Dee (1527-1608) e Thomas Hood (1556-1620), possibilitaram o florescimento da Matemática prática na Inglaterra e a impulsionaram a acompanhar o continente Europeu, de modo geral, na divulgação da Matemática prática associada aos instrumentos (HACKMANN, 2013).

Vários estudiosos, nessa época, impulsionados pela divulgação das matemáticas em Londres, pela realização de novos estudos e pela demanda de instrumentos, principalmente, relacionados à astronomia, agrimensura e navegação, publicaram diversos tipos de tratados, alguns continham instrumentos matemáticos, como os tratados de Leonard Digges (1520-1559), Thomas Hood, William Oughtred (1574-1660) e de outros que tratavam de assuntos como logaritmos, pode-se mencionar Henry Briggs (1561-1630).

Logo, grande parte do conhecimento matemático da Inglaterra, no século XVII, estava centrado na capital Londres. Nesse cenário de grande ascensão quanto aos conhecimentos matemáticos, sua disseminação e o desenvolvimento de oficinais de fabricação de instrumentos, foi que Edmund Gunter viveu, autor do tratado escolhido para a pesquisa.

Nascido, em 1581, no condado de Hertforshire, na Inglaterra, Gunter foi educado em Westminster School e na Christ Church, em Oxford, e obteve a graduação de Bacharel em Artes no ano de 1603, posteriormente, obteve a titulação de Mestre em Artes em 1605. Edmund Gunter foi pároco da igreja St. George’s em 1615, além de ter recebido o título de Bacharel em Divindades nesse mesmo ano. Apesar de sua função de padre, Edmund Gunter não se distanciou dos estudos sobre as matemáticas (WARD, 1740).

Depois de obter seus títulos,

> [...] ele foi entrevistado por Sir Henry Savile para uma nova cadeira de geometria de Savilean em Oxford, mas foi rejeitado em favor de Henry Briggs. De acordo com o relato de Aubrey sobre o evento, Gunter parece ter sido rejeitado por estar excessivamente interessado no uso de instrumentos em matemática (HIGTON, 2013, p. 184-185, tradução nossa)[18].

---

[18] Lê-se em inglês: “[…] he was interviewed by Sir Henry Savile for the new Savilean chair of geometry at Oxford, but was rejected in favour of Henry Briggs. According to Aubrey's account of the event, Gunter appears to have been turned down for having shown too great an interest in the use of instruments in mathematics” (HIGTON, 2013, p. 184-185).

Gunter levou para a entrevista os instrumentos que havia construído, o Setor e o Quadrante, e começou a manuseá-los, porém a manipulação desses artefatos, na entrevista, não agradou, pois suas manipulações de geometria, através dos instrumentos, eram consideradas como truques e não como uma interpretação geométrica de fato (CAMPBELL-KELLY *et al.*, 2003).

Não obtendo êxito em tornar-se professor de geometria, em Oxford, por causa da sua tendência em estudar a Matemática prática e por, na época, as universidades não estarem interessadas nesse tipo de estudo, Gunter teve uma oportunidade em 1619, quando o então professor de astronomia do Gresham College, Thomas Williams (?), renunciou seu cargo em 4 de março de 1619. Edmund Gunter foi convidado para assumir a vaga dois dias depois, por indicação de Henry Briggs, em que aceitou. Após seu ingresso no Gresham College, Gunter teve contato com diversos conhecimentos matemáticos, que o possibilitaram desenvolver estudos que renderam alguns tratados importantes na época.

Nesse ambiente de estudos voltados para a Matemática prática, de acordo com Mckie (1960, p. 6, tradução nossa)[19],

> Briggs, Gunter e Gellibrand estavam todos muito preocupados com problemas de navegação, Gunter especialmente com instrumentos de navegação; o trabalho no Gresham College neste período em matemática e astronomia é característico da natureza prática e afiada dos estudos contemporâneos nesses campos.

A aliança entre Gunter e os estudiosos das matemáticas era notável, em 1619, quando Edmund Gunter tornou-se professor, "[...] por um ano ou mais (até o cargo de professor de Briggs, no Gresham College, terminar em 1620), Gunter e Briggs foram intimamente associados; e os dois homens desempenharam um grande papel em trazer o uso de logaritmos para a prática de navegação" (COTTER, 1981, p. 363, tradução nossa)[20].

Uma evidência dessa aproximação é encontrada em uma passagem de William Oughtred, na qual relata, em primeira pessoa, que

> Na primavera de 1618, estando em Londres, fui ver meu honrado amigo, Mestre Henry Briggs, em Gresham College: que então me trouxe a conhecer o Mestre Gunter recentemente escolhido como leitor de Astronomia lá [...]. Com quem falando sobre

---

[19] Lê-se no original: "Briggs and Gunter and Gellibrand were all much concerned with problems of navigation, Gunter especially with navigating instruments; the work at Gresham College in this period in mathematics and in astronomy is characteristic of the practical and applied nature of contemporary studies in these fields" (MCKIE, 1960, p. 6).

[20] Lê-se em inglês: "[...] In 1619 Gunter was appointed Gresham Professor of Astronomy, and for a year or so (until Briggs' professorship at Gresham College ended in 1620), Gunter and Briggs were closely associated; and the two men played a big part in bringing the use of logarithms into the practice of navigation" (COTTER, 1981).

> seu quadrante, mostrei-lhe meu Instrumento Horizontall: Ele o viu com muita atenção: e questionou sobre a projeção e o uso dela, muitas vezes dizendo essas palavras, é muito bom. E não muito depois de entregar ao Mestre Briggs para ser enviado a mim meu próprio Instrumento impresso a partir de um corte em latão: o qual depois eu entendi que ele apresentou ao honrável Conde de Bridgewater [...] (OUGHTRED, 1632, p. 15-16)[21].

Assim, afirma-se que Edmund Gunter era realmente próximo de Henry Briggs, seu colega de ofício e de William Oughtred, de quem se aproximou por seus interesses a respeito dos instrumentos matemáticos e ele tinha uma relação com o conde de Bridgewater, título atribuído a John Egerton (1579-1649), já que Gunter lhe apresentou o instrumento de Oughtred.

Edmund Gunter publicou vários tratados durante sua vida, tais como manuscritos sobre o instrumento Setor, *New projection of the Sphere*, *Canon triangvlorvm*, *De Sectore & Radio*, *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments…* e o *The description and use of his majestie's dials in Whitehall Garden.* No entanto, em 10 de dezembro de 1626, repentinamente, Gunter morreu precocemente em seu quarto, aos 45 anos, no Gresham College e foi sepultado em uma cova sem identificação na igreja de São Pedro.

2.2 Estudos realizados por Edmund Gunter

Há uma divergência nas literaturas acerca dos estudos desenvolvidos por Edmund Gunter. Para Pepper (1981, p. 593, tradução nossa)[22], "o primeiro trabalho matemático publicado de Gunter foi o *Canon triangvlorvm* de 1620 [...]". Contudo, para Cotter (1981, p. 363, tradução nossa)[23], "em 1603 Gunter havia escrito um relato de uma 'New projection of the Sphere' [...]".

Roegel (2010) vai ao encontro da mesma perspectiva de Cotter (1981) de que, antes de ser convidado para ser professor do Gresham College, Gunter já tinha escrito um relato chamado *New projection of the Sphere*, em 1606 e manuscritos sobre um instrumento chamado Setor, por volta do ano de 1607, levando em conta relatos do próprio Gunter. Não há muitas informações nas literaturas sobre essas realizações. Há evidências da existência desses

---

[21] Lê-se no original: "In the Spring 1618 I being at London went to see my honoured friend Master Henry Briggs at Gresham College: who then brought me acquainted with Master Gunter lately chosen Astronomie reader there, […]. With whom falling into speech about his quadrant, I shewed him my Horizontall Instrument: He viewed it very heedfully: and questioned about the projecture and use thereof, often saying these words, it is a very good one. And not long after he delivered to Master Briggs to be sent to me mine owne Instrument printed off from one cut in brasse: which afterwards I understood he presented to the right Honourable the Earle of Bridgewater […]" (OUGHTRED, 1632, p. 15-16).

[22] Lê-se em inglês: "Gunter's first published mathematical work was the Canon triangulorum of 1620 […]" (PEPPER, 1981, p. 593).

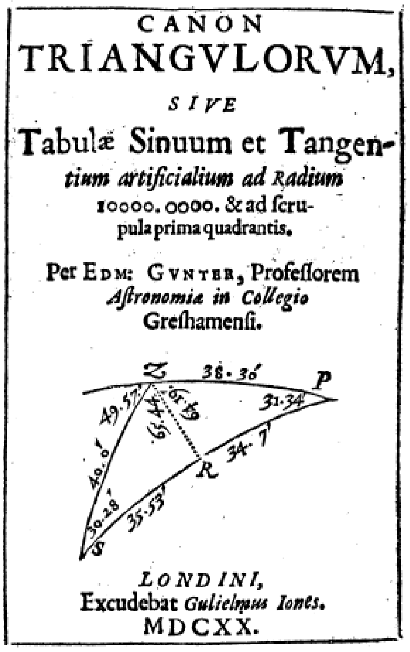
[23] Lê-se em inglês: "As early as 1603 Gunter had written an account of a 'New Projection of the Sphere' [...]" (COTTER, 1981, p. 363).

manuscritos em um relato de Gunter, em uma nota ao leitor em um tratado posterior, em que expõe: “é bem sabido por muitos de vocês que este Setor foi assim inventado, [...] em Latim, muitas cópias transcritas e dispersas mais de dezesseis anos desde então” (GUNTER, 1623, p. 143, tradução nossa)[24].

Dessa forma, reforça-se que Gunter era interessado em instrumentos matemáticos ao desenvolver um instrumento chamado Setor[25], mesmo antes de ingressar no Gresham College e de ter escrito, em latim, sobre a descrição e o uso desse instrumento, cujas várias cópias desse manuscrito circularam pela Inglaterra naquela época e que, mais tarde, seria publicado em versão impressa (COTTER, 1981). Esses manuscritos renderam a Gunter muitas amizades importantes, como de Henry Briggs, William Oughtred e John Egerton.

Depois de seu ingresso como professor de astronomia no Gresham College, em 1619, Edmund Gunter escreveu seu primeiro tratado matemático impresso, publicado, em sua primeira versão, no ano de 1620, impresso por Gulielmus Jones, em latim, intitulado *Canon Triangvlorvm* (Figura 3) (PEPPER, 1981).

Figura 3 – *Canon Triangvlorvm*


CANON
TRIANGVLORVM,
SIVE
Tabulæ Sinuum et Tangentium artificialium ad Radium 10000.0000. & ad scrupula prima quadrantis.
Per EDM: GVNTER, Professorem Astronomiæ in Collegio Greshamensi.

LONDINI,
Excudebat Gulielmus Iones.
MDCXX.

Fonte: Gunter (1620, frontispício).

[24] Lê-se no original: “It is well known to many of you, that this Sector was thus contrived, the most part of this Book written in Latine, many Copies transcribed and dispersed more than sixteen years since” (GUNTER, 1623, p. 143).
[25] Esse instrumento já havia sido desenvolvido por Galileu e Thomas Hood anteriormente ao Setor desenvolvido por Gunter (HIGTON, 1996).

O tratado escrito, em latim, traz, no seu frontispício, o título *Canon Triangvlorvm* e informações do que esse estudo aborda, que são tabelas de senos e tangentes artificiais com o raio de 10000,0000 partes e cada minuto do quadrante. Cotter (1981, p. 363, tradução nossa)[26] afirma que a

> [...] publicação das tabelas de Gunter de funções trigonométricas logarítmicas[27] (as primeiras tabelas desse tipo) em 1620 deve ser visto como sendo de importância crucial no avanço de navegação e astronomia náutica. O que Briggs fez pelos logaritmos de números, Gunter fez para logaritmos de funções trigonométricas [...].

O *Canon Triangvlorvm* foi publicado, em 1623, em inglês, contendo os mesmos elementos que a primeira publicação de 1620 em latim, configurando-se, assim, como uma tradução da versão original, sendo redigida em língua vernácula.

Esse tratado conta com uma dedicatória em latim, também na publicação em inglês, para o conde de Bridgewater, visconde de Brackley e barão de Ellesmere. Como visto anteriormente, Gunter tinha uma proximidade com ele. Quem tinha esses títulos era John Egerton,

> [...] o primeiro conde de Bridgewater, era uma figura pública cuja estrela estava muito em ascensão. Ele era barão do Tesouro de Chester de 1599 a 1605, e foi feito cavaleiro de Bath quando James chegou à Inglaterra em 1603. Ele recebeu um MA honorário de Oxford em 1605 e se tornou o primeiro conde de Bridgewater em 1617 (CAMPBELL-KELLY, 2003, p. 61, tradução nossa)[28].

Após a dedicatória, Gunter (1623, p. A2, tradução nossa)[29] traz a definição do que seu tratado vai abordar, os senos e as tangentes artificiais, e explica que

> estes Senos não são como a metade das cordas do arco duplo, nem as Tangentes perpendiculares no final do Diâmetro: mas outros números substituídos em seu lugar, para atingir o mesmo fim por uma maneira mais fácil, como os Logaritmos do Lorde de Merchiston, e então eu os chamei de Senos e Tangentes Artificiais.

---

[26] Lê-se em inglês: “[...] publication of Gunter's tables of logarithmic trigonometrical functions (the first tables of their kind) in 1620 must be seen as being of crucial importance in the advancement of navigation and nautical astronomy. What Briggs did for logarithms of numbers, Gunter did for logarithms of trigonometrical functions […]” (COTTER, 1981, p. 363).

[27] Nesse período, ainda não existia o conceito de funções trigonométricas logarítmicas, logo, é uma expressão anacrônica de Cotter (1981). O tratado *Canon Triangvlorvm* possui tabelas que entrelaçam conhecimentos trigonométricos e logarítmicos da época.

[28] Lê-se em inglês: “[…] the first Earl of Bridgewater, was a public figure whose star was very much in the ascendant. He was baron of the exchequer of Chester from 1599 until 1605, and was made a knight of the Bath on James Is arrival in England in 1603. He received an honorary MA from Oxford in 1605 and became the first Earl of Bridgewater in 1617” (CAMPBELL-KELLY, 2003, p. 61).

[29] Lê-se em inglês: “For these Sines are not such as half the chords of the double arke, nor these Tangents perpendiculars at the end of the Diameter: but other umbers substituted in their place, for attaining the same end by a more easy way, such as the Logarithmes of the Lord of Merchiston, and thereupon I call them Artificiall Sines and Tangents” (GUNTER, 1623, p. A2).

Sobre os logaritmos do lorde de Merchiston, Gunter está se referindo aos desenvolvidos por John Napier (1550-1617). Napier tinha esse título por causa de seu pai, que também era lorde. O primeiro tratado escrito por Napier sobre os logaritmos é intitulado como *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, publicado no ano de 1614. Em 1619, foi publicado outro tratado intitulado *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, que, igualmente, envolve os estudos de Napier sobre esse assunto.

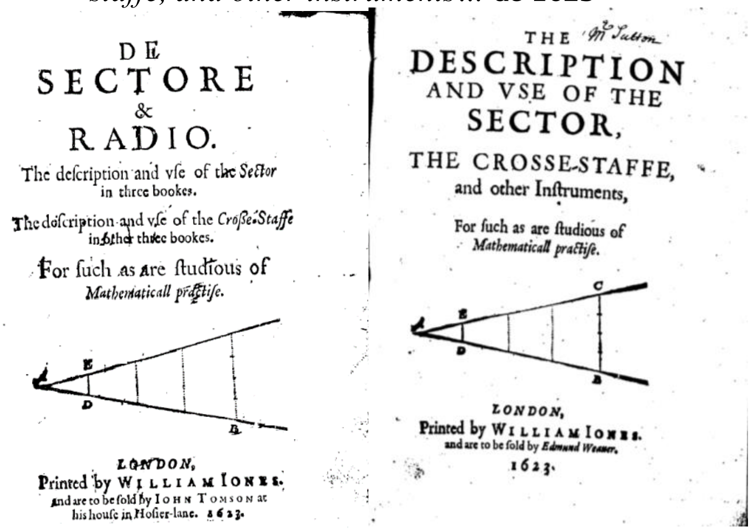
Posteriormente, Henry Briggs visitou John Napier na Escócia, nos anos de 1615 e 1616, para estudar os logaritmos. A partir dessa aproximação, Briggs elaborou tabelas logarítmicas de base decimal e um tratado foi publicado em Londres, no ano de 1617, intitulado *Logarithmorum chilias prima*, contendo essas tabelas.

Então, Gunter ao ter contato com os estudos desenvolvidos por Briggs enquanto professores do Gresham e a partir do seu interesse em instrumentos, ele escreveu um tratado chamado *De Sectore & Radio*[30], publicado em Londres, em sua primeira versão, no ano de 1623, impresso por William Jones e vendido por John Tomson, contendo a descrição e o uso de quatro instrumentos, Setor, *Cross-staff*, *Cross-bow* e Quadrante.

Uma outra versão do *De Sectore & Radio*, de Gunter, foi publicada no mesmo ano, 1623, contudo, com o nome de *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments, for such as are studious of mathematicall practise*[31] (Figura 4), impressa também por William Jones, porém vendida por Edmund Weaver.

[30] Em português, é o Setor e o Rádio (também conhecido como *Cross-staff*).
[31] Em português, é a descrição e o uso do Setor, o *Cross-staff* e outros instrumentos, para aqueles que são estudiosos de Matemática prática.

Figura 4 – Tratado *De Sectore & Radio* e *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments…* de 1623


DE SECTORE & RADIO.
The description and vse of the Sector in three bookes.
The description and vse of the Crosse-Staffe in other three bookes.
For such as are studious of Mathematicall practise.
LONDON,
Printed by WILLIAM IONES, and are to be sold by IOHN TOMSON at his house in Hosier-lane. 1623.

THE DESCRIPTION AND VSE OF THE SECTOR, THE CROSSE-STAFFE, and other Instruments,
For such as are studious of Mathematicall practise.
LONDON,
Printed by WILLIAM IONES, and are to be sold by Edmund Weaver, 1623.

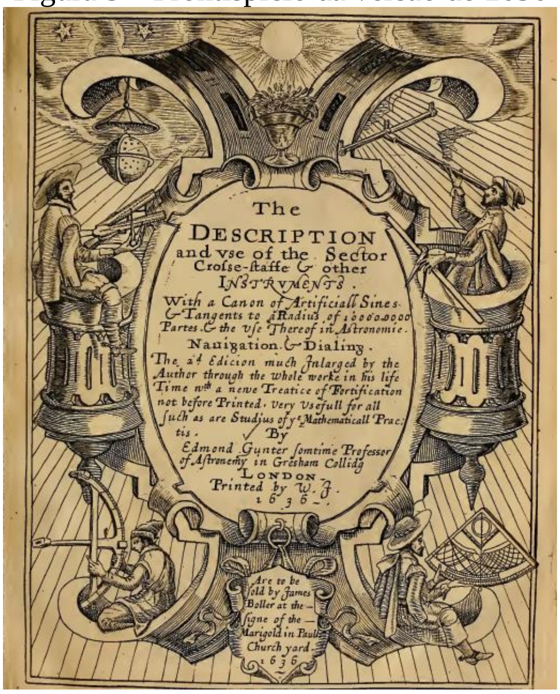
Fonte: Elaborada pela autora (2020).

Esses dois estudos estão divididos em duas partes, a primeira contém os manuscritos sobre o Setor, porém trazidos em língua vernácula. A segunda parte trata sobre o *Cross-staff* e mais dois apêndices com dois outros instrumentos, o *Cross-bow* e o Quadrante.

O *The description and use of the Sector, the Crosse-staffe and other instruments…* teve diversas versões, como as edições publicadas em 1624, 1636, 1653, 1662 e 1673. Denota-se a importância que esse tratado teve no século XVII, por suas diversas publicações no decorrer do tempo. A publicação de 1624 é similar à primeira versão, isto é, a de 1623.

Entretanto, na impressão de 1636, consta uma compilação de alguns estudos desenvolvidos por Gunter no tratado intitulado *The description and vse of the Sector Crosse-staffe and other instruments. With Canon of Artificiall Sines and Tangents, to a Radius of 10000.000. partes, and the vse there of in Astronomie, Navigation and Dialling* (Figura 5). Essa publicação tem algumas alterações quando comparada à versão original de 1623, desde o frontispício ao conteúdo, já que há pequenos acréscimos ao texto.

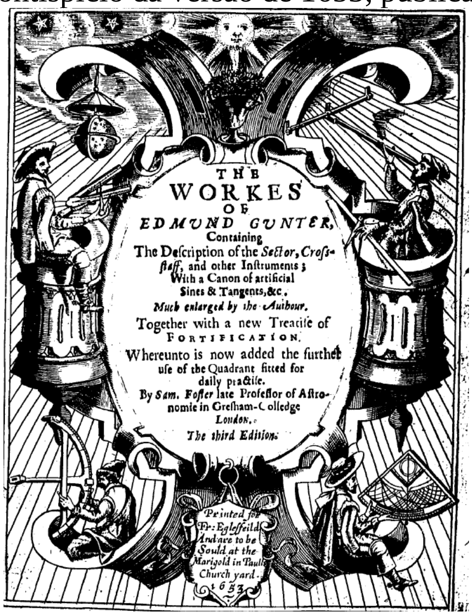
Figura 5 – Frontispício da versão de 1636



Fonte: Gunter (1636, frontispício).

As versões de 1653 e 1662 foram intituladas como *The Workes of Edmund Gunter*... (Figura 6) e são compilações das obras de Gunter, mas foram publicadas por Samuel Foster (1619-1652), professor de astronomia do Gresham College, em 1636 e, algum tempo depois, entre os anos de 1641 e 1652. Nessas edições publicadas por Foster, ele traz um tratado adicional de sua autoria, que aborda o instrumento Quadrante.

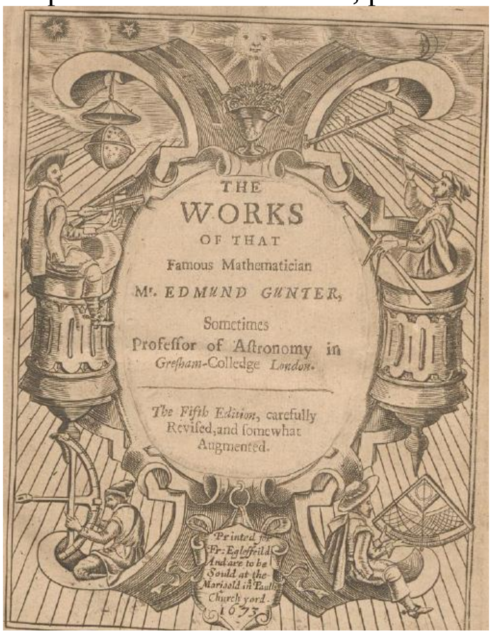
Figura 6 – Frontispício da versão de 1653, publicada por Foster



Fonte: Foster (1653, frontispício).

Já a edição do tratado de 1673 foi publicada por William Leyboun (1626-1716), com o mesmo título das edições publicadas por Foster e são um compilado dos tratados de Edmund Gunter, todavia o frontispício é diferente (Figura 7), além de Leybourn fazer alguns comentários no decorrer dos estudos e corrigir alguns pontos dos tratados.

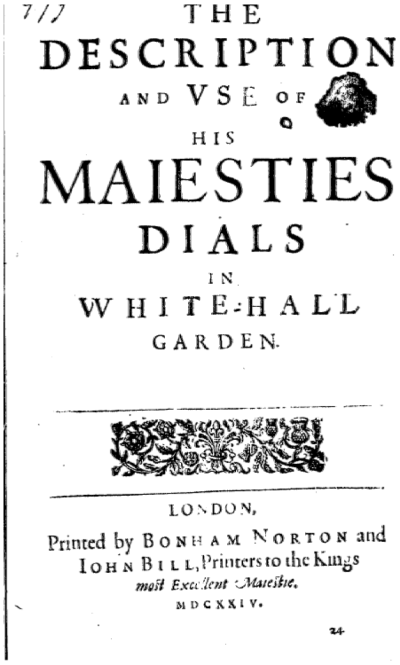
Figura 7 – Frontispício da versão de 1673, publicada por Leybourn



Fonte: Leybourn (1673, frontispício).

Além desses tratados, Gunter também desenhou algumas linhas em uma pedra em Whitehall Garden, utilizadas, por exemplo, para saber a hora e o minuto do dia, mostrar a hora e o minuto do nascer e pôr do sol em qualquer momento do ano, mesmo se o sol não brilhar e para descobrir em que azimute o sol nasce ou se põe. Edmund Gunter escreveu a descrição e o uso desse artefato no idioma inglês a pedido do príncipe Charles, em um pequeno tratado, que foi impresso a mando do rei James I, no ano de 1624, intitulado *The description and use of his majestie's dials in Whitehall Garden* (Figura 8) (WARD, 1740; NICHOLSON, 1809).

Figura 8 – *The description and use of his majesties dials in Whitehall Garden*



THE
DESCRIPTION
AND VSE OF
HIS
MAIESTIES
DIALS
IN
WHITE-HALL
GARDEN.

LONDON,
Printed by BONHAM NORTON and
IOHN BILL, Printers to the Kings
most Excellent Maiestie.
MDCXXIV.

Fonte: Gunter (1624a, contracapa).

Dessa maneira, Edmund Gunter escreveu um total de quatro tratados e um manuscrito, que tiveram grande repercussão, não só entre os estudiosos das matemáticas. Inclusive, seus estudos eram designados àqueles que eram considerados melancólicos, como ressalta Burton (1883, p. 324, tradução nossa)[32], quando indica "[...] aquelas tabelas de senos e tangentes artificiais, não muito tempo desde estabelecido por meu velho colegiado, bom amigo e falecido colega estudante da Christ-Church em Oxford, Sr. Edmund Gunter, que fará isso apenas por adição e subtração [...]". Portanto, os estudos desenvolvidos por Gunter perpassavam por toda a sociedade londrina, da Matemática prática à Medicina.

Ressalta-se, assim, a grande repercussão que os estudos de Gunter tiveram no século XVII, tanto na Inglaterra quanto na Europa, de modo geral, vista a influência e a notoriedade que eram dadas aos praticantes de Matemática nesse período e aos estudos inéditos desenvolvidos por Gunter[33]. Além disso, diversos tratados foram elaborados tendo como inspiração os estudos e as escalas elaboradas para o instrumento *Cross-staff*, de Gunter, principalmente, as escalas desenvolvidas por ele, como as publicações de Wingate (1624), Oughtred (1633) e Curtis (1824).

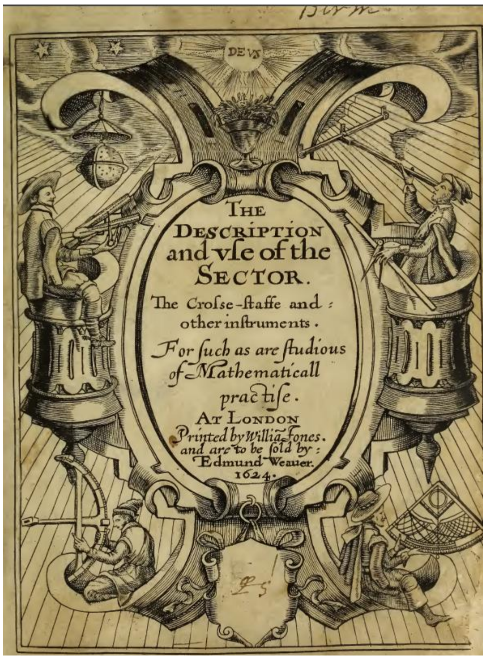
[32] Lê-se no original: "[…] those tables of artificiall Sines and Tangentes, not long since set out by mine old Collegiate, good friend, and late fellow-Student of Christ-Church in Oxford, Mr Edmund Gunter, which will performe that by addition and subtraction onely […]" (BURTON, 1883, p. 324).

[33] Definem-se os praticantes de Matemática como "[...] homens que ganhavam a vida ensinando, escrevendo, construindo e vendendo instrumentos e atuando em capacidades técnicas" (COMARCK, 2017a, p. 3, tradução nossa).

2.3 Sobre *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments…*

O tratado de Edmund Gunter, *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments, for such as are studious of Mathematicall practise*, apresenta, já no frontispício (Figura 9), algumas informações que remetem ao seu conteúdo e a quem ele é direcionado.

Figura 9 – Frontispício de *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments...*



Fonte: Gunter (1624b, frontispício).

O frontispício traz muitas informações sobre a obra e o seu contexto. Gunter (1623) deixa claro que esse tratado é destinado para os estudiosos de Matemática prática. Há imagens que remontam ao que o tratado aborda e ao seu público-alvo, isto é, apresenta quatro instrumentos portados por pessoas que os utilizam. Por isso, esse estudo trata acerca de quatro instrumentos matemáticos, como exposto anteriormente.

Já no que diz respeito à dedicatória do tratado, Gunter (1623) a apresenta em latim e a dedica, tal como no *Canon Triangvlorvm*, a John Egerton, conde de Bridgewater, visconde de Brackley e barão de Ellesmere, homem influente na sociedade londrina, que tinha contato com outros estudiosos das matemáticas.

O estudo também conta com sumário, algumas erratas e, no final da parte do instrumento Setor, o autor traz uma nota, em que Gunter (1623, p. 143, tradução nossa)[34] explicita:

> É sabido por muitos de vocês que esse Setor foi, portanto, inventado, [e] a maior parte deste livro escrito em latim, em muitas cópias transcritas e dispersas há mais de dezesseis anos desde então. Enfim, eu estou satisfeito de que ele esteja publicado em inglês. Não que eu ache que isso seja digno do meu trabalho ou da opinião pública, mas, em parte, para satisfazer uma importunação, daqueles que não entendem o latim e que ainda estavam a cargo de comprar o instrumento e, em parte, para minha própria facilidade. Pois, assim como é penoso para outros transcreverem minha cópia, assim é problemático para eu satisfazer aqui a todos que a querem. Se eu achar que isso lhe dá conteúdo, isso me incentivará a fazer o mesmo para meu *Cross-staff* e alguns outros instrumentos. Nesse meio tempo, aguente as falhas da Impressora, e então eu descanso.

Nessa nota ao leitor, Gunter (1623) explica que o Setor já tinha sido escrito, anteriormente, em manuscritos em latim e ele decidiu escrever esse tratado em inglês, devido à facilidade no entendimento e para diminuir a dificuldade de transcrever uma cópia do manuscrito. Visto que ele escreveu a parte do *Cross-staff* também em inglês, evidencia-se que a recepção foi bem-sucedida, pois, nesse período, os escritos, em língua vernácula, estavam tomando força desde o renascimento[35].

O mundo dos eruditos era o ambiente acadêmico, mas, com as grandes mudanças na disseminação do conhecimento, esses saberes foram além dos muros da universidade. Na Inglaterra, o conhecimento matemático, por exemplo, estava circulando entre aqueles chamados praticantes de Matemática, que eram habilidosos com instrumentos matemáticos e que tiveram grandes contribuições em diversos assuntos da sociedade, como navegação, expansão colonial, econômica, cartografia, artilharia e fortificação, e foi um período em que muitos estudos, em língua vernácula, foram realizados (HACKMANN, 2013). Assim, Gunter foi incentivado a escrever outros tratados em inglês, haja vista que o estudo de 1623 foi bem recebido e mais pessoas poderiam ter acesso aos seus escritos.

Quanto aos estudos citados por Gunter (1623), há menção de alguns que estavam em circulação na época, como o de Briggs (1617), referenciado por Gunter para a construção da escala dos números inscrita no *staff*, também há menção aos *Elementos*, de Euclides, na parte

---

[34] Lê-se em inglês: "It is well knowne to many of you, that this Sector was thus contrived, the most part of this booke written in latin, many copies transcribed and dispersed more then sixteene yeares since. I am at the last contented to give way that it come forth in English. Not that I thinke it worthy either of my labor or the publique view, but partly to satisfy their importunity, who not understanding the Latin, yet were at the charge to buy the instrument, and partly for my owne ease. For as it is painefull for others to transcribe my copie, so it is troublesome for me to give satisfaction berein to all that desire it. If I finde this to give you content, it shall incourage me to do the like for my Crosse-staffe, and some other Instruments. In the meane time beare with the Printers faults, and so I rest" (GUNTER, 1623, p. 143).

[35] Para mais informações sobre o período renascentista, vide Debus (1996).

em que se trata do Setor e aos estudos de Rainer Gemma Frisius (1558) e de Thomas Hood (1590) quando o autor aborda a descrição e o uso do instrumento *Cross-staff*.

No que diz respeito à organização da obra de 1623, ela é constituída por duas partes (Quadro 2), em que Gunter (1623) traz, nas duas primeiras, a descrição dos instrumentos matemáticos: Setor, *Cross-staff*, *Cross-bow* e Quadrante.

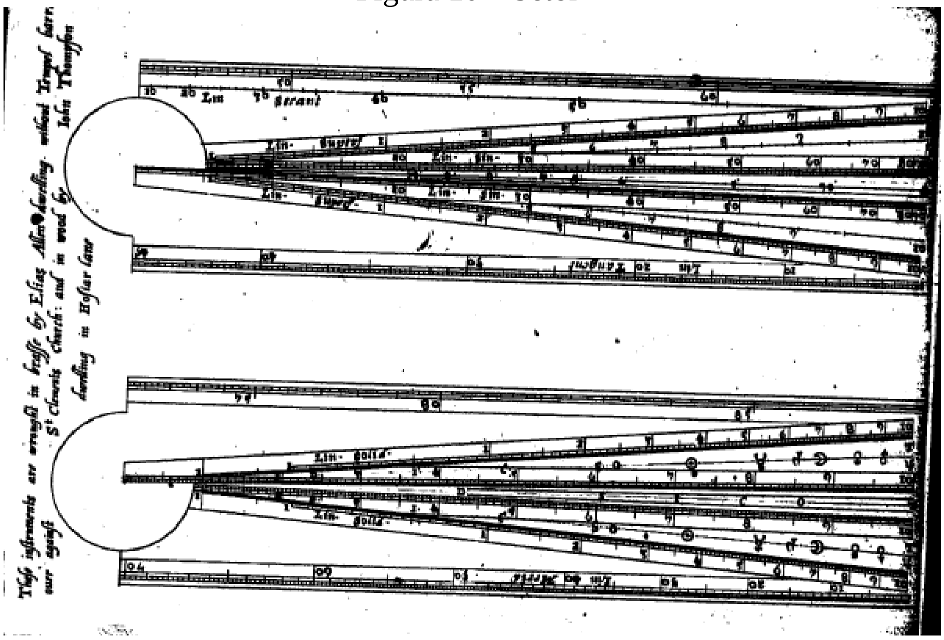
Quadro 2 – Organização do tratado de Gunter (1623)

PARTE	CONTEÚDO DO LIVRO	CAPÍTULOS	APÊNDICES
Setor	*The contents of the first booke of the Sector*	4	-
	The Contents of the second booke of the Sector	6	-
	The Contents of the third booke of the Sector	6	-
Cross-staff	*The contents of the first booke of the Crosse-staffe*	10	-
	The contents of the second booke of the Crosse-staffe	6	*Cross-bow*
	The contents of the third booke of the Crosse-staffe	20	Quadrante

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

A primeira parte do tratado tem como foco o instrumento Setor (Figura 10) e está dividida em três livros, os quais tratam da descrição do instrumento, da construção e do uso das linhas que o compõem. Ao final dessa parte, há a nota ao leitor escrita por Gunter, como apresentada anteriormente.

Figura 10 – Setor



Fonte: Gunter (1623, s/p).

A Figura 10, em que se encontra uma imagem do Setor abordado no tratado da versão de 1623, informa que o Setor foi confeccionado, em latão, por Elias Allen (1588-1653)[36] e, em madeira, por John Thompson (1609-1648)[37] e Nathaniell Gos (?) e conta com o endereço de suas oficinais.

Gunter (1623, p. 1, tradução nossa)[38] define o instrumento da seguinte forma:

> O Setor, em geometria, é uma figura composta por duas linhas retas contendo um ângulo no centro e a circunferência assumida por eles. Este *instrumento geométrico* com duas pernas, contendo toda a variedade de ângulos, e a distância dos pés, representando as subtensas da circunferência, é, portanto, chamado pelo mesmo nome.

No primeiro livro sobre o Setor, Gunter (1623) traz a descrição do Setor, que é composto por 12 linhas ou escalas dispostas nas hastes móveis, das quais sete são as escalas gerais: escala de linha, superfícies, sólidos, senos e acordes, tangentes, secantes e meridiana; as outras cinco escalas são chamadas por Gunter (1623) de escalas particulares, que são: escala de quadratura, segmentos, corpos inscritos na mesma esfera, corpos equacionados e escala de metais, como consta no Quadro 3. Além de tratar do uso geral da escala de linha, superfícies e sólidos.

---

[36] Um famoso fabricante de instrumentos, especializado na construção de instrumentos em latão e em prata (TAYLOR, 1968).

[37] Fabricante de instrumentos em madeira (TAYLOR, 1968).

[38] Lê-se no original: “Sector in Geometrie, is a figure comprehended of two right lines containing an angle at the center, and of the circumference assumed by them. This *Geometricall instrument* having two legs containing all varietie of angles, & the distance of the feete, representing the subtenses of the circumference, is therefore called by the same name” (GUNTER, 1623, p. 1).

Quadro 3 – Escalas do Setor

Classificação das escalas	Tipo de escala
Escalas gerais	Escala de linha
	Escala de superfícies
	Escala de sólidos
	Escala de senos e cordas
	Escala de tangentes
	Escala de secantes
	Escala meridiana
Escalas particulares	Escala de quadratura
	Escala de segmentos
	Escala de corpos inscritos na mesma esfera
	Escala dos corpos equacionados
	Escala de metais

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

No segundo livro, o autor trata do uso das escalas circulares, escala de senos e cordas, tangentes, secantes e meridiana, usando conceitos de astronomia para tais usos e para a escala meridiana, direcionando-a para uso na prática da navegação.

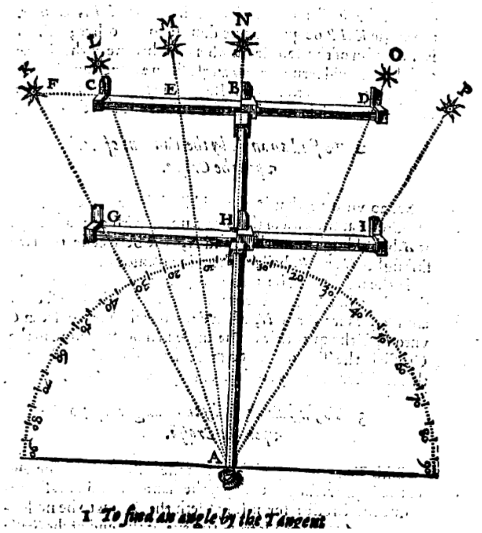
No último livro sobre o Setor, Gunter (1623) trata sobre o uso das escalas particulares, quadratura, segmentos, corpos inscritos na mesma esfera, corpos equacionados e metais. Assim, o uso das escalas do Setor engloba conhecimentos de astronomia, geometria e vai além dos assuntos tratados pelo *Quadrivium*, referindo-se a conhecimentos sobre alquimia[39].

A segunda parte do tratado está dividida em três livros, que tratam do *Cross-Staff*, em que o autor descreve as partes que compõem o instrumento; da construção das escalas que são inscritas no *cross* e no *staff* e como é feito o manuseio de cada uma delas.

No primeiro livro sobre o *Cross-staff* (Figura 11), o autor apresenta o instrumento e descreve suas escalas, sendo inscritas no *staff* sete escalas, classificadas em quatro tipos: "uma delas serve para medir e prolongar; uma para observação de ângulos; uma para o mapa do mar; e as quatro outras, para trabalharem proporções de vários tipos" (GUNTER, 1623, p. 2, tradução nossa)[40].

[39] Para mais informações sobre o Setor desenvolvido por Gunter, vide Hudson (1946) e Sangwin (2003).
[40] Lê-se no original: "One of them serves for measure and protraction: one for observation of angles: one for the Sea-chart; and the foure others for working of proportions in severall kinds" (GUNTER, 1623, p. 2).

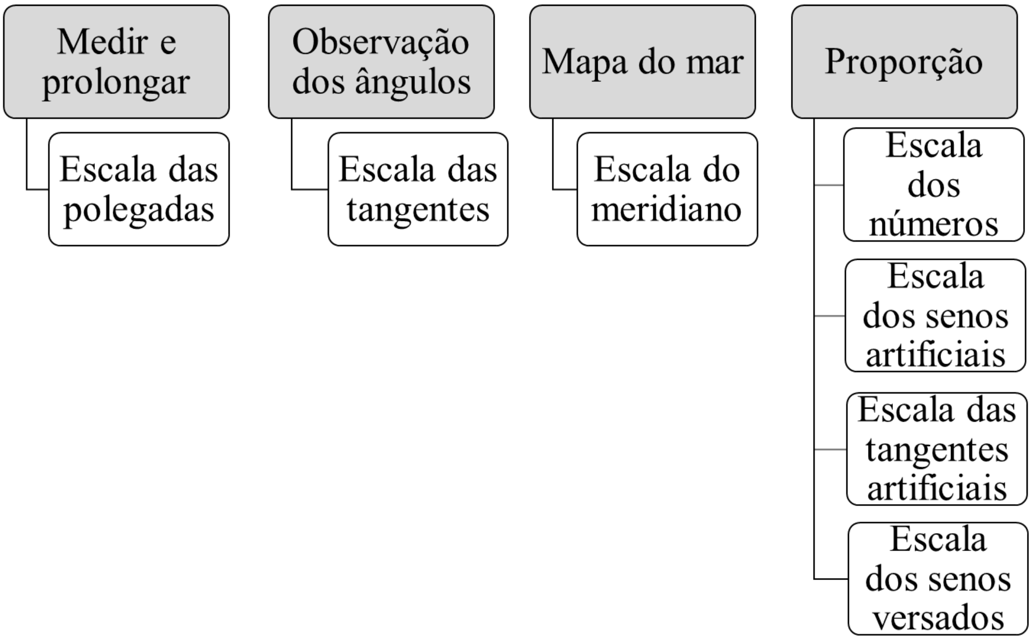
Figura 11 – *Cross-staff*



Fonte: Gunter (1623, p. 9).

Logo, para medir e prolongar, usa-se a escala das polegadas; para a observação de ângulos, a escala das tangentes; para o mapa do mar, a escala do meridiano e, para efetuar proporções diversas, a escala dos números, senos artificiais, tangentes artificiais e senos versados, como visto na Figura 12.

Figura 12 – Classificação das escalas do *staff*



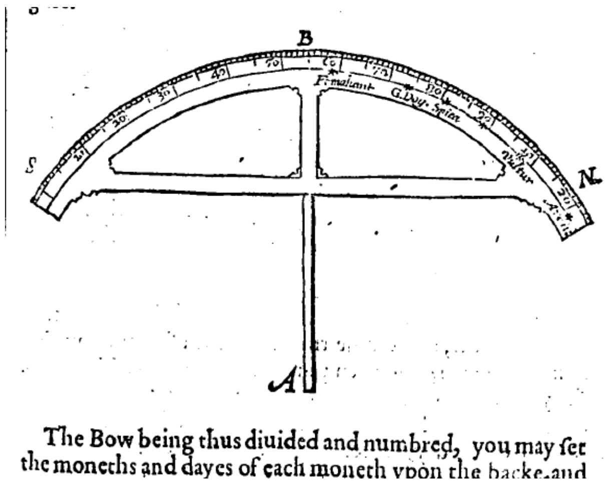
Fonte: Elaborada pela autora (2020).

As cinco escalas presentes no *cross* não são classificadas, a saber: a escala da tangente de 20; a tangente de 30; as escalas das polegadas; as cordas e a continuação da escala meridiana inscrita no *staff*. No restante do primeiro livro, consta o uso geral das escalas.

No segundo livro sobre o *Cross-staff*, Gunter (1623) foca em apresentar usos diversos para as escalas das proporções, números, senos artificiais e tangentes artificiais, portanto, são dispostos manuseios para a obtenção de medida de superfícies em várias unidades de medida e usos voltados para navegação.

Nessa parte do tratado, no segundo livro do *Cross-staff*, é trazido um apêndice que conta com um instrumento chamado *Cross-bow* (Figura 13), em que Gunter (1623) descreve a construção de suas escalas e seu manuseio.

Figura 13 – *Cross-bow*



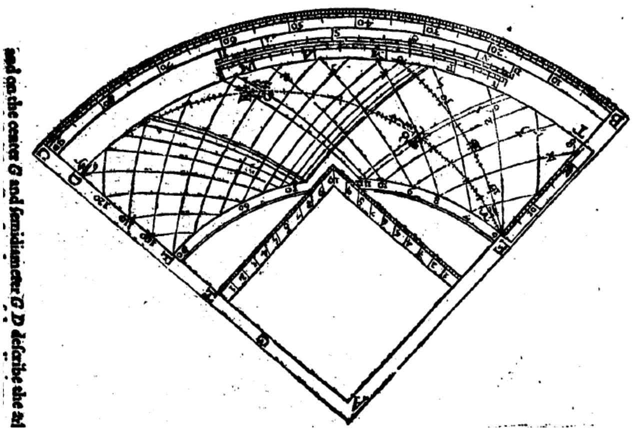
Fonte: Gunter (1623, p. 79).

Esse instrumento, em forma de arco cruzado, era utilizado para achar a latitude no mar e é composto pela terceira parte de um círculo de raio AB e marcado em 120 graus. Cada grau é dividido em 6 partes para que cada uma dessas divisões tenha 10 minutos. E a metade dessa terça parte de círculo é marcada com o grau 55. Gunter (1623) afirma que, além da marcação dos graus, pode-se marcar, no instrumento, os dias do ano a partir da inclinação do sol. Isso é possível associando-se a inclinação do sol com o dia do ano.

O terceiro livro do *Cross-staff* apresenta o uso da escala dos números, senos artificiais e tangentes artificiais para desenhar as linhas das horas em todos os tipos de planos. Nessa parte do tratado, Gunter (1623) faz uso do seu instrumento Setor, juntamente com as escalas das proporções, para obtenção dessas linhas das horas.

Esse livro também traz um apêndice contendo outro instrumento apresentado por Gunter (1623), o Quadrante (Figura 14) de um quarto de círculo, nesse apêndice, o autor se apropria de construções matemáticas anteriores e faz algumas conclusões para essas construções, com o auxílio do Quadrante, em que o descreve e apresenta seus usos.

Figura 14 – Quadrante



Fonte: Gunter (1623, p. 188).

Gunter (1623) constrói esse Quadrante a partir de um quarto de círculo e o divide em vários semidiâmetros (raios) para a construção de outras escalas, entre elas, o arco que contempla os trópicos, a linha correspondente ao Equador e o Ecliptique, que está associado aos signos do zodíaco através da reta de ascensão que se refere à reta partindo de A até o ângulo respectivo do signo. O autor ainda apresenta tabelas para se fazer uma escala de declinação.

Sabendo-se da organização do documento e de seus aspectos gerais, parte-se agora para uma abordagem epistemológica da obra no que diz respeito ao instrumento *Cross-staff*, à sua descrição e de suas escalas, assim como ao manuseio da escala dos números para dois usos. Dessa maneira, o capítulo três tratará dos conhecimentos matemáticos incorporados na escala dos números e do seu manuseio para encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua e para obter a média proporcional de dois números dados.

3 A ESCALA DOS NÚMEROS: UMA INOVAÇÃO NOS INSTRUMENTOS DE CÁLCULO DO SÉCULO XVII

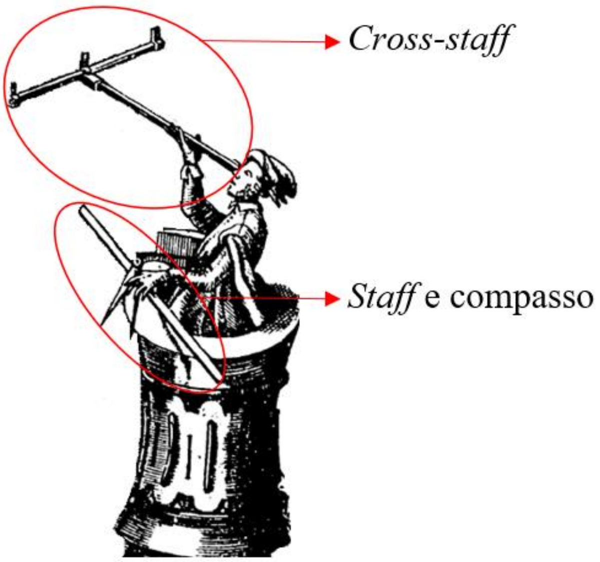
O *Cross-staff* era um instrumento bastante disseminado nos séculos XVI e XVII. O diferencial desse instrumento, elaborado por Edmund Gunter, é um conjunto de escalas utilizadas para encontrar proporções de vários tipos, inéditas até então, inscritas no *staff* e usadas com o auxílio de um compasso, posteriormente, foram amplamente divulgadas na Europa, em que a escala dos números, que compunha esse conjunto, ficou conhecida como um instrumento de cálculo, a escala de Gunter.

Este capítulo apresenta o instrumento *Cross-staff* e as escalas que o compõem, particularmente, dá-se ênfase às escalas das proporções, tendo como foco a escala dos números, no que diz respeito à sua construção e ao seu manuseio para encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua e para obter a média proporcional de dois números.

3.1 O C*ross-staff* de Edmund Gunter

No frontispício do *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments…*, destaca-se, na Figura 15, um homem portando três peças, que ilustram o que será abordado no decorrer do tratado, na parte referente ao *Cross-staff*.

Figura 15 – Instrumento estampado no frontispício do tratado



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, frontispício).

O homem, na imagem apresentada, está segurando três objetos, a partir de uma leitura aprofundada do tratado, percebe-se que eles correspondem ao instrumento *Cross-staff* e ao *staff* juntamente com um compasso. Esse apontamento é evidenciado por meio do estudo da parte que contém o instrumento *Cross-staff*, cujo autor destaca algumas escalas do *staff*, que podem ser usadas sem o auxílio do *cross*, mas utilizando um compasso.

No que se refere à definição desse instrumento pelo autor, Gunter (1623, p. 1, tradução nossa)[41] diz que

> O Cross-Staff[42] é um instrumento muito conhecido por homens do mar, e muito usado por astrônomos antigos e outros, servindo astronomicamente para observação de altitude e ângulos de distância no céu, geometricamente para alturas e distâncias perpendiculares na terra e no mar

Nota-se que esse instrumento perpassava por vários ofícios, da astronomia à agrimensura, porém muitos instrumentos desse tipo foram desenvolvidos no século XVI e XVII, o autor destaca dois estudiosos que publicaram sobre o *Cross-staff*:

> A descrição e vários usos do mesmo são impressos, por *Gemma Frisius* em latim, em inglês por *Dr. Hood.* Eu fiz algo diferente daqueles dois no projeto deste Staff, mas como as regras deles podem ser aplicadas a ele, e todas as suas proposições são obtidas por ele: e, portanto, referindo-me ao leitor dos livros deles, serei mais breve na explicação daquilo que pode ser aplicado deles aos meus e, portanto, chegamos ao uso daquelas linhas que foram por mim adicionadas, e não existentes até agora (GUNTER, 1623, p. 1, tradução nossa)[43].

Gunter (1623) estava se referindo a um tratado escrito, em latim, por Rainer Gemma Frisius, que foi publicado em 1545, intitulado *De Radio Astronomico et Geometrico liber* (Figura 16). Esse estudo continha um tipo de báculo contemplando a construção do instrumento e seu uso.

---

[41] Lê-se em inglês: “The Crosse-Staffe is an instrument well knowe to our Sea-men, and much used by the ancient astronomers and others, serving astronomically for observation of altitude and angles of distance in the heavens, Geometrically for perpendicular Heights and distances on land and sea” (GUNTER, 1623, p. 1).
[42] No documento original, Gunter (1623) traz a denominação *Crosse-staffe*, porém utilizou-se, nesta pesquisa, o termo em inglês moderno, *Cross-staff*, para se referir ao instrumento.
[43] Lê-se em inglês: “The description and severall use of it are extant in print, by *Gemma Frisius* in Latin, in English by Dr. *Hood.* I differ something from them both, in the projection pf this Staffe, but so, as their rules may be applied unto it, and all their propositions be wrought by it: and therefore referring the reader to their bookes, I shal be briefe in the explanation of that which may be applied from theirs unto mine, and so come to the use of those lines which are of my addition, not extant heretofore” (GUNTER, 1623, p. 1).

Figura 16 – Tratado *De Radio Astronomico et Geometrico liber*


GEMMAE FRISII
MEDICI ET MATHEMATICI,
De Radio Aſtronomico & Geometrico liber. In quo
multa quæ ad Geographiã, Opticam, Geometriam
& Aſtronomiam vtiliſs. ſunt, demonſtrantur.
Illuſtriſs. Comiti de Feria dicatus.

Titanis radios firmato lumine perfert
(Symbolum habes cuius) fulua Tonantis auis,
Tu comes, eſt Aquilæ cui par cum lumine pectus,
Ingenij radios hoc acuas Radio,
Hoc Radio terras, cœlum, cœliq; micanteis
Cognoſces radios, ſydereasq; faces.

CVM PRIVILEGIO AD SEXENNIVM.

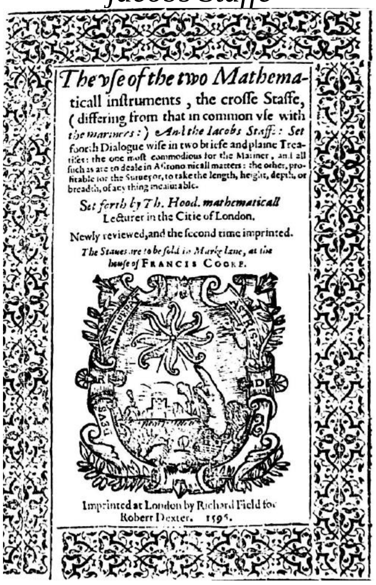
Antuerpiæ apud Greg. Bontiũ ſub ſcuto Baſilieñ.
& Louanii apud Petrum Phaleſium.

Fonte: Frisius (1545, frontispício).

Roche (1979) relata que o *Cross-staff*, de Gunter, era muito semelhante ao de Frisius. Isso fortalece a afirmação de Gunter (1623) em não se aprofundar nas descrições e propriedades que valiam nos outros instrumentos e que também se aplicavam ao seu.

Em relação ao estudo de Thomas Hood, Gunter (1623) se refere à sua obra intitulada *The vse of the two mathematicall instruments, the crosse staff and... the jacobs Staffe* (Figura 17), publicada em 1595, no idioma inglês.

Figura 17 – Tratado *The vse of the two mathematicall instruments, the crosse Staff and... the jacobs Staffe*


The vſe of the two Mathematicall inſtruments, the croſſe Staffe, (differing from that in common vſe with the mariners:) And the Iacobs Staffe: Set foorth Dialogue wiſe in two briefe and plaine Treatiſes: the one moſt commodious for the Mariner, and all such as are to deale in Aſtronomicall matters: the other, profitable for the Surueyor, to take the length, height, depth, or breadth, of any thing meaſurable.

Set forth by Th. Hood. mathematicall Lecturer in the Citie of London.

Newly reviewed, and the ſecond time imprinted.

The Staues are to be ſold in Marke lane, at the houſe of FRANCIS COOKE.

Imprinted at London by Richard Field for Robert Dexter. 1595.

Fonte: Hood (1595, frontispício).

Gunter (1623) é breve quanto à descrição das escalas, que já estavam presentes nos instrumentos construídos anteriormente, então, ele se volta para a exploração das escalas que foram elaboradas por ele. Aqui, percebe-se que as escalas desenvolvidas por Gunter são classificadas por ele como escalas das proporções.

Após explicar o que seu *Cross-staff* apresenta de diferente, o autor chega à descrição do instrumento, em que

> As partes necessárias deste instrumento são cinco: o Staff, o Cross e as três miras. O Staff que fiz para meu próprio uso, tem uma jarda inteira de comprimento, para que possa servir de medida.
> O Cross que pertence a ele [*Staff*] é de 26 polegadas [e] 1/5 entre os dois pontos das miras externas. Se alguém o desejar, a proporção entre o Staff e o Cross poderá ser de 360 a 262 (GUNTER, 1623, p. 1-2, tradução nossa)[44].

Na descrição do instrumento, destaca-se que o autor indica as partes que o compõem, assim como informa uma proporção entre o *staff* e o *cross*. Nota-se que, no decorrer do tratado, Gunter (1623) utiliza proporção em diversos momentos no uso das escalas. Depois de apresentar as partes do instrumento, Gunter (1623) começa a descrever as escalas que o compõem.

3.2 As escalas do *Cross-staff*

Como visto no tópico anterior, Gunter (1623) inicia a parte sobre o instrumento *Cross-staff* classificando as escalas, que estão inscritas no *staff*, em: escalas para medir e prolongar, para observação de ângulos, uma para o mapa do mar e outras quatro para realizar proporções de vários tipos (mais detalhes na Figura 12, da página 33, deste estudo). Em seguida, ele descreve as escalas que estão dispostas no *cross.*

O autor não é detalhista quanto à descrição das escalas, visto que algumas já foram apresentadas em outros estudos. Entretanto, para a construção daquelas que foram desenvolvidas por Gunter, o autor dá indícios de estudos que auxiliam nas suas construções. Apresenta-se, então, as escalas do *Cross-staff* a seguir.

---

[44] Lê-se em inglês: "The necessary parts of this instrument are five: the Staffe, the Crosse, and the three sights. The Staffe which I made for my owne use, is a full Yard in length, that so it may serve for measure. The Crosse belonging to it is 26 inches 1/5 betweene the two outward sights. If any would have it in a greater forme, the proportion betweene the Staffe and the Crosse, may be such as 360 unto 262" (GUNTER, 1623, p. 1-2).

3.2.1 As escalas do cross

O autor apresenta as cinco escalas que compõem o *cross* (Figura 18), a partir da página três da parte que trata sobre o *Cross-staff*, são elas: a escala da tangente de 20, a da tangente de 30, a escala das polegadas, a das cordas e a escala do meridiano.

Figura 18 – O *cross*

Fonte: Adaptado de Gunter (1623, frontispício).

A primeira escala inscrita no *cross*, que Gunter (1623, p. 3, tradução nossa)[45] descreve, é a da tangente de 20, apresentada como "uma escala de tangente de 36gr. 3m. numerado de 5. 10.15. até 35: o meio é de 20gr. e, portanto, eu chamo de tangente de 20; e isso tem respeito até 20 gr. na tangente no *Staff*". Em seguida, ele traz a descrição de "uma escala de Tangente de 49gr. 6m. numerado por 5. 10.15. até 45; o meio é de 30gr. e corresponde até 30gr. na tangente do *Staff*, pelo que eu chamo de tangente de 30".

O restante das escalas inscritas no *cross* são apresentadas:

> Uma escala das *polegadas* numerada com 1. 2. 3. até 26; cada polegada subdividiu-se igualmente em dez partes, respondendo à escala de polegadas sobre o Staffe.
> Uma escala das *cordas* diversas, uma que corresponde a um círculo de doze polegadas de semidiâmetro, numerado com 10. 20. 30. até 60: outro a um semidiâmetro de um círculo de 6 polegadas; e o terceiro a um semidiâmetro de um círculo de três polegadas; ambos numerados com 10. 20. 30. a 90.

---

[45] Lê-se em inglês: "A tangent line of 36gr. 3m. numbred by 5. 10.15. unto 25: the midst whereof is at 20gr; and therefore I call it the tangent of 20; and this hath respect unto 20gr. In the tangent on the Staffe. A tangent line of 49gr. 6m. numbred by 5. 10.15. unto 45; the midst whereof is at 30gr. and hath respect unto 30gr. in the tangent on the Staffe, whereupon I call it the tangent of 30" (GUNTER, 1623, p. 3).

> Uma continuação da escala do *meridiano* de 57gr. de latitude até 76gr; e a partir de 76gr. até 84gr. (GUNTER, 1623, p. 3, tradução nossa)[46].

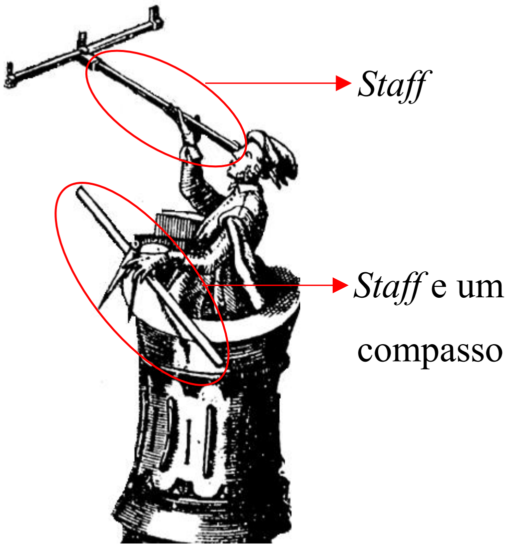
Assim, a escala da polegada do *cross* é utilizada em conjunto com a das polegadas inscrita no *staff*; a das cordas é usada separadamente com o auxílio do compasso e a escala meridiana do *cross* é uma continuação da escala do meridiano inscrita no *staff*. Gunter (1623) acrescenta que a construção dessa escala do meridiano pode ser tirada por uma tabela que se encontra na parte em que ele trata sobre o instrumento Setor.

Como o autor tinha deixado claro, ele não explora a construção das escalas que estão presentes em outros estudos anteriores ao seu, as escalas das polegadas, tal como as das tangentes, já estavam inseridas em outros instrumentos, entretanto, um conjunto de escalas utilizadas em proporções, inscritas no *staff*, eram novidade, dessa maneira, ele se aprofunda na construção e no uso delas.

3.2.2 As escalas do staff

No *staff* desenvolvido por Edmund Gunter, são inscritas sete escalas, classificadas em quatro tipos, como visto anteriormente. É, nessa parte do instrumento, que estão dispostas as escalas elaboradas por Gunter (1623).

Figura 19 – O *staff*



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, frontispício).

[46] Lê-se inglês: "A line of inches numbred with 1. 2. 3. unto 26; each inch equally subdivided into ten parts, answerable to the inch line upon the Staffe. A line of severall chords, one answerable to a circle of twelve inches semidiameter, numbred with 10. 20. 30. Unto 60: another to a semidiameter of a circle of fix inches; and the third to a semidiameter of a circle of three inches; both numbred with 10. 20. 30. unto 90. A continuation of the meridian line from 57gr. Of latitude unto 76gr; and from 76gr. To 84gr." (GUNTER, 1623, p. 3).

A primeira escala do *staff*, que Gunter (1623, p. 2, tradução nossa)[47] descreve, é a das polegadas, na qual "a escala de medida é uma escala de polegada e pode ser reconhecida por suas partes iguais. A jarda completa foi dividida igualmente em 36 polegadas, e cada polegada subdividida, primeiro em dez partes e depois cada décima parte na metade". Essa construção justifica o tamanho do *staff* feito pelo autor, adotando uma jarda completa como comprimento, assim, facilita a divisão das polegadas no instrumento.

Já a escala para a observação de ângulos, chamada de escala das tangentes, "[...] pode ser conhecida pelos números duplos definidos em ambos os lados da linha, começando de um lado em 20 e terminando em 90: do outro lado em 40 e terminando em 180: e essa sendo dividida de acordo com os graus de um quadrante, eu chamo de escala da tangente no Staff" (GUNTER, 1623, p. 2, tradução nossa)[48]. O autor não dá mais detalhes sobre a construção dessa escala. Portanto, a escala da tangente de 20 e da tangente de 30 no *cross* são utilizadas juntamente com a escala das tangentes inscrita no *staff* e são construídas a partir de tabelas de tangentes comuns.

Outra escala inscrita, nessa parte do instrumento, é a do meridiano para traçar o mapa do mar, construída "[...] de acordo com a projeção do *Mercator*[49] do equinocial a 58 gr. de latitude e pode ser conhecido pela letra *M* e pelos números 1. 2. 3. 4. até 58" (GUNTER, 1623, p. 2, tradução nossa)[50].

Em seguida, Gunter (1623) apresenta a descrição das quatro escalas das proporções, que são de sua autoria: a escala dos números, a dos senos artificiais, a das tangentes artificiais e a escala dos senos versado,s que são manuseadas sem o auxílio do *cross*, utiliza-se o compasso para usar essas escalas, isso justifica a imagem do frontispício do tratado, que traz a ilustração do *staff* e de um compasso. Como essas escalas são de sua autoria, Gunter (1623) traz a representação de três delas, exceto da escala dos senos versados, haja vista que ela pode ser substituída pelas demais escalas das proporções.

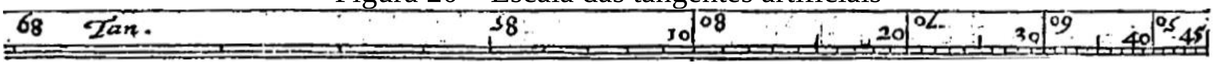
A primeira escala das proporções a ser descrita é a dos números, que será abordada de maneira mais aprofundada na próxima sessão. A seguinte é a escala das tangentes artificiais

---

[47] Lê-se em inglês: "The line of measure is an inch line, and may be knowne by his equall parts. The whole yard being divided equally into 36 inches, and each inch subdivided, first into ten parts, and then each tenth part into halfes" (GUNTER, 1623, p. 2).
[48] Lê-se em inglês: "[…] knowne by the double numbers set on both sides of the line, beginnging at the one side at 20, and endind at 90: on the other side at 40, and ending at 180: and this being divided according to the degrees of a quadrat, I call it the tangent line on the Staffe" (GUNTER, 1623, p.2).
[49] "A projeção de Mercator é uma projeção de mapa cilíndrico apresentada pelo geógrafo e cartógrafo flamengo Gerardus Mercator em 1569" (FLETCHER, 2017, p. 488, tradução nossa).
[50] Lê-se em inglês: "[…] according to Mercators projection from the equinoctiall to 58gr. Of latitude, and may be knowne by the letter M, and the numbers 1. 2. 3. 4. unto 58" (GUNTER, 1623, p. 2).

(Figura 20): “[...] anotada com a letra T; dividida desigualmente em 45 graus, e numerada nos dois sentidos, para a tangente e o complemento” (GUNTER, 1623, p. 2, tradução nossa)[51].

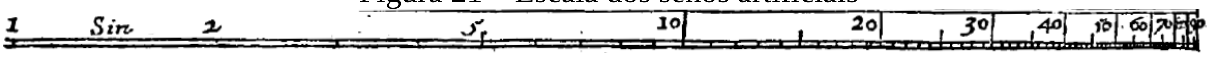
Figura 20 – Escala das tangentes artificiais



Fonte: Gunter (1623, p. 31).

Posteriormente, o autor descreve “a escala dos *senos artificiais* (Figura 21), anotada com a letra S; dividida desigualmente em 90 graus e numerado com 1. 2. 3. 4. até 90” (GUNTER, 1623, p. 2, tradução nossa)[52].

Figura 21 – Escala dos senos artificiais



Fonte: Gunter (1623, p. 31).

Por fim, Gunter (1623, p. 2, tradução nossa)[53] apresenta a escala dos senos versados, utilizada “[...] para encontrar mais facilmente a hora e o azimute[54], notada com V, dividida desigualmente em cerca de 164gr. 50m. numerada em sentido contrário com 10. 20. 30. até 164”. O autor não apresenta uma imagem dessa escala, um indício para essa decisão advém do fato de que seu uso pode ser substituído pelo manuseio das demais escalas das proporções[55].

Sobre a construção dessas escalas, Gunter (1623, p. 4, tradução nossa)[56] acrescenta que “a escala de números pode ser inserida no primeiro Chiliad do Sr. Briggs Logarithmes: e o restante das escalas de proporção fora do meu Canon de senos e tangentes artificiais, e para compensar, este livro servirá como comentário para explicar o uso do meu Canon”. Dessa forma, o autor indica o tratado de Henry Briggs sobre logaritmos, para a construção da escala dos números e seu tratado *Canon Triangvlorvm*, para as demais escalas das proporções. A seguir, apresenta-se uma possível construção para a primeira.

[51] Lê-se no original: “[…] noted with the letter T; divided unequally into 45 degrees, and numbred both ways, for the Tangent and the complement” (GUNTER, 1623, p. 2).
[52] Lê-se em inglês: “The line of artificial sines, noted with the letter S; divided unequally into 90 degrees, and numbred with 1. 2. 3. 4. unto 90” (GUNTER, 1623, p. 2).
[53] Lê-se no original: “[…] for more ease finding the houre and azimuth, noted with V, divided unequally into about 164gr. 50m. numbred backward with 10. 20. 30. unto 164” (GUNTER, 1623, p. 2).
[54] Azimute corresponde a “[...] círculos verticais que cortam um ao outro nos pontos chamados Zenith e Nadir, como os meridianos ou círculos horários fazem com os polos e passam por todos os graus do horizonte em ângulos retos” (BAILEY; GORDON; MILLER, 1736, s/p, tradução nossa).
[55] Para mais informações sobre as escalas das proporções, posteriormente conhecidas como escala de Gunter, vide: Robertson (1753) e Van Poelje (2004; 2005).
[56] Lê-se no original: “The line of numbers may be inseribed out of the frist Chiliad of Mr. Briggs Logarithmes: & the resto of the lines of proportion out of my Canon of artificial lines and tangents, and in recompense thereof this booke will serve as comment to explane the use of my Canon” (GUNTER, 1623, p. 4).

3.3 Sobre a construção da escala dos números

As escalas das proporções foram desenvolvidas enquanto Edmund Gunter era professor do Gresham College, em que ele "[...] deve ter recebido muitos comentários práticos de capitães de navios e outros navegadores [...]" em suas palestras (VAN POELJE, 2004, p. 13, tradução nossa)[57]. Isso pode ter influenciado no desenvolvimento de escalas para serem utilizadas na prática da navegação, inclusive no desenvolvimento da escala dos números, visto que ela também era voltada para a navegação, juntamente com as demais escalas das proporções.

As escalas classificadas, por Gunter (1623, p. 2, tradução nossa)[58], como de proporções são quatro e estão inscritas no *staff*. Elas tinham seus usos direcionados para a realização de cálculos voltados para a navegação, o que vai ao encontro do que era incentivado a ser estudado nesse período. O autor começa descrevendo a escala dos números, "[...] anotada com a letra N, dividida desigualmente em 1000 partes, e numerada com 1. 2. 3. 4. até 10".

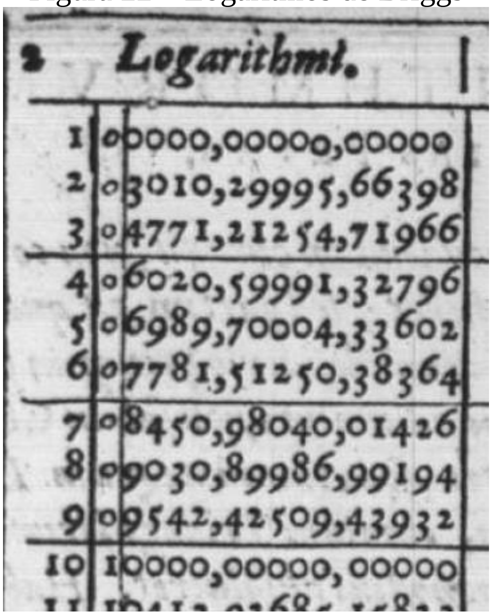
Para a construção, Gunter (1623, p. 4, tradução nossa)[59] indica que "a escala dos números pode ser inserida no primeiro Chiliad Logarithmes do Sr. Briggs [...]". Gunter (1623) se refere ao tratado *Logarithmorum Chilias Prima*, de Henry Briggs, publicado em 1617, para fazer as marcações da escala, porém não dá mais detalhes de como proceder no processo de construção. Nesse estudo de Briggs, são dispostas várias tabelas logarítmicas contendo os primeiros 1000 logaritmos, logo, a escala dos números utiliza esses logaritmos para sua construção.

Os logaritmos, que Briggs traz nessas tabelas inseridas no tratado, são semelhantes aos logaritmos de base 10 que temos atualmente, como mostra a Figura 22. As tabelas dos logaritmos decimais de Briggs têm as representações dos logaritmos de 1 a 1000 com 14 casas decimais cada um (ROEGEL, 2011).

---

[57] Lê-se em inglês: "[…] Must have received a lot of practical feedback from ship captains and other navigators in his audience" (VAN POELJE, 2004, p. 13).
[58] Lê-se em inglês: "[…] noted with the letter N, divided unequally into 1000 parts, and numbred with 1. 2. 3. 4. unto 10" (GUNTER, 1623, p. 2).
[59] Lê no original: "The line of numbers may be inseribed out of the frist Chiliad of Mr. *Briggs* Logarithmes […]" (GUNTER, 1623, p. 4).

Figura 22 – Logaritmos de Briggs

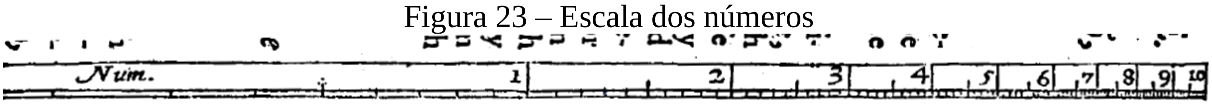


2	Logarithmi.	
1	0	0000,00000,00000
2	0	3010,29995,66398
3	0	4771,21254,71966
4	0	6020,59991,32796
5	0	6989,70004,33602
6	0	7781,51250,38364
7	0	8450,98040,01426
8	0	9030,89986,99194
9	0	9542,42509,43932
10	1	0000,00000,00000

Fonte: Briggs (1617, p. 2).

Provavelmente, Gunter (1623) utilizou os logaritmos de Briggs para a construção dessa escala, pois eles eram amigos, tiveram grande contato e contribuições em seus estudos, e ambos eram professores do Gresham College quando Gunter desenvolveu essa escala. O autor não dá mais evidências de como fazer as marcações da escala, então, aqui, é apresentada uma ideia matemática incorporada na construção da escala, considerando cada logaritmo das tabelas de Briggs. Entretanto, o autor pode tê-la construído partindo de outro pensamento, talvez considerando os logaritmos primos e encontrando os demais pela propriedade de multiplicação. No segundo livro do *Cross-staff*, o autor traz uma imagem dessa escala, como visto na Figura 23.

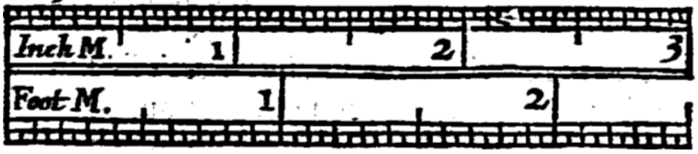
Figura 23 – Escala dos números



Fonte: Gunter (1623, p. 31).

Com a imagem da escala dos números, fica evidente a passagem da sua descrição, em que o autor destaca suas marcações desiguais, fato que decorre das marcações por logaritmos. Contudo, não é possível identificar, no tratado, qual medida de comprimento Gunter (1623) utilizou para fazer as marcações da escala. É indubitável que ele traz, em seu estudo, uma escala de polegadas e de pés (Figura 24), isso indica a possibilidade de Gunter (1623) ter identificado o valor dos logaritmos nessas escalas, transformando-os em uma medida de comprimento para construir as marcações da escala dos números.

Figura 24 – Escala para transformação de medidas



Fonte: Gunter (1623, p. 32).

Um indício de que Gunter (1623) utilizou polegadas como medida de comprimento, para construir essa escala, vem retratado em estudos posteriores ao *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments…*, como o de Brown (1662, p. 178, tradução nossa)[60], em que ele menciona o uso da escala dos números em uma régua deslizante: “os limites da régua geralmente são definidos a medida do pé, sendo o pé de 12 polegadas [...]”. Outro estudo que evidencia essa construção é o de Brown (1688), que trata do uso da escala dos números juntamente com uma régua de carpinteiro, comumente feita a partir de polegadas. No entanto, percebe-se que o padrão de medida utilizado não interfere na eficácia da escala.

Uma opção de construção é considerar a primeira marcação como ponto inicial para a inscrição dos demais logaritmos, dessa maneira, todos os números correspondentes aos logaritmos vão ser marcados partindo-se do ponto inicial, o logaritmo de 1, que é igual a 0. Assim, consideraram-se as tabelas de Briggs, com algumas alterações, para melhor explicação das marcações da escala.

Como os logaritmos de Briggs têm 14 casas decimais, as marcações são aproximadas, então, foram considerados, para a representação, todos os logaritmos multiplicados por 10, para que fiquem com uma parte inteira e com duas casas decimais. Dessa forma, as distâncias entre os logaritmos terão parte inteira e decimal. Pode-se observar, na Figura 25, a representação do logaritmo de 2 na escala, que Gunter (1623) traz em seu tratado.

Figura 25 – As primeiras marcações da escala dos números

Fonte: Adaptada de Gunter (1623, p. 31).

As duas marcações da Figura 25 correspondem, respectivamente, aos logaritmos de 1 e de 2, isto é, a distância da marcação de 1 a 2 equivale, aproximadamente, ao logaritmo de 2, ou seja, 3,01. Em linguagem matemática moderna, tem-se que

$$10(\log 2) = 10(0{,}301) = 3{,}01$$

[60] Lê-se em inglês: “On the edges of the Rule is usually set Foot measure, being the Foot of 12 Inches […]” (BROWN, 1662, p. 178).

Entre o espaço dos números que serão dispostos, por exemplo, entre 1 e 2, há mais 100 divisões entre eles, pois a escala é dividida em 1000 partes, porém essas marcações não serão numeradas e Gunter (1623) não constrói todas na escala, em que ele traz em seu tratado.

Briggs (1617) não traz, nas suas tabelas logarítmicas, números decimais para fazer os restantes das marcações da escala, todavia, segundo Roegel (2011), "Briggs considera os logaritmos de frações e obtém o equivalente a $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$ [...]". De fato, no tratado *Arithmetica logarithmica,* Briggs (1628, p. 19, tradução nossa)[61] afirma que "se o logaritmo do denominador for retirado do logaritmo do numerador, permanece o logaritmo da fração".

Contudo, o conceito de fração do século XVII era diferente do que se tem hoje, Briggs (1628) traz uma passagem que explica como obter esses logaritmos por meio de exemplos. Na Figura 26, constam exemplos trazidos por Briggs (1628) para se obter logaritmos decimais.

Figura 26 – Exemplo de logaritmos decimais

7	0,84509,8	$4\frac{9}{10}$	0,69019,6
49	1,69019,6	$3\frac{34}{100}$	0,53529,4
343	2,53529,4	$2\frac{401}{1000}$	0,38039,2
2401	3,38039,2	$16\frac{807}{1000}$	1,22549,0
16807	4,22549,0		

Fonte: Briggs (1628, p.5).

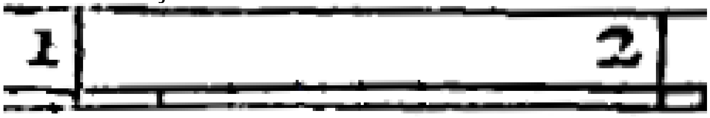
Concebendo, em notação moderna, o exemplo do log 49 = 1,69019,6, para obter o logaritmo de 4,9, Briggs (1628) considerou $4\frac{9}{10}$, pois ele dividiu 49 por 10, obtendo 4 inteiros e 9 décimos. Em seguida, subtraiu log 49 – log 10 = 0,69019,6 = log 4,9. Por isso, para obter as marcações dos logaritmos decimais, como o de 1,1, por exemplo, basta analisar o logaritmo de $1\frac{1}{10}$, então, será subtraído do logaritmo de 11 o logaritmo de 10. Como foram considerados os logaritmos de Briggs (1617) multiplicados por 10, matematicamente, obtêm-se as marcações decimais, como expressas a seguir:

$$10(\log 1{,}1) = 10(\log 11 \div 10) = 10(\log 1\tfrac{1}{10}) = 10(\log 11 - \log 10) = 10(1{,}0413 - 1) =$$
$$10(0{,}0413) = 0{,}413$$

[61] Lê-se em latim: "Si Logarithmus Denominatoris auferatur è Logarithmo Numeratoris, restabit Logarithmus Partium" (BRIGGS, 1628, p. 19).

Destarte, aplicando-se a propriedade do logaritmo da fração, conforme Briggs (1628), em outras palavras, o logaritmo da fração, podem-se obter os demais logaritmos para realizar as marcações da escala dos números, como observado na Figura 27.

Figura 27 – Marcação com números decimais na escala dos números



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Assim, a Figura 27 mostra a marcação dos logaritmos de 1, 1,1 e 2. Para fazer as demais marcações com uma casa decimal, é necessário seguir o processo de fração de logaritmos com denominador igual a 10, dessa maneira, subtraindo seus respectivos logaritmos (Figura 28).

$$10(\log 1{,}1) = 10(\log 11 \div 10) = 10(\log 1\tfrac{1}{10}) = 10(\log 11 - \log 10) = 10(1{,}0413 - 1) =$$
$$10(0{,}0413) = 0{,}413$$

$$10(\log 1{,}2) = 10(\log 12 \div 10) = 10(\log 1\tfrac{2}{10}) = 10(\log 12 - \log 10) = 10(1{,}0791 - 1) =$$
$$10(0{,}0791) = 0{,}791$$

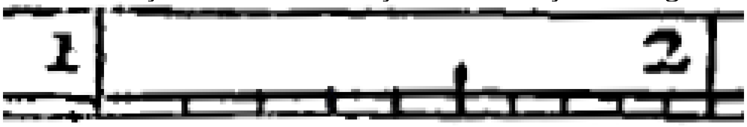
.

.

.

$$10(\log 1{,}9) = 10(\log 19 \div 10) = 10(\log 1\tfrac{9}{10}) = 10(\log 19 - \log 10) = 10(1{,}2787 - 1) =$$
$$10(0{,}2787) = 2{,}787$$

Figura 28 – Marcações com a realização da subtração do logaritmo de 10



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Gunter (1623) não traz, na escala apresentada no tratado, as demais divisões para que a escala tenha 1000 marcações. Mas a ideia é análoga a marcar os logaritmos com duas casas decimais, é preciso dividir os logaritmos das centenas por 100 da seguinte forma, obtendo as 100 primeiras marcações da escala dos números. Ou seja,

$$10(\log 1{,}01) = 10(\log 101 \div 100) = 10(\log 1\tfrac{1}{100}) = 10(\log 101 - \log 100) = 10(2{,}0043 - 2) =$$
$$10(0{,}0043) = 0{,}043$$

$$10(\log 1{,}02) = 10(\log 102 \div 10) = 10(\log 1\tfrac{2}{100}) = 10(\log 102 - \log 100) = 10(2{,}0086 - 2) =$$
$$10(0{,}0086) = 0{,}086$$

.

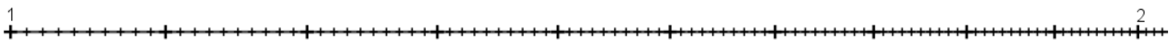
.

.

$$10(\log 1{,}99) = 10(\log 199 \div 10) = 10(\log 1\tfrac{99}{100}) = 10(\log 199 - \log 100) = 10(2{,}2988 - 2) =$$
$$10(0{,}2988) = 2{,}988$$

Para essas marcações, Gunter (1623) não traz a representação na escala que ele disponibiliza no tratado, contudo, uma visualização é apresentada na Figura 29. Algumas das possibilidades de o autor não continuar com as divisões na escala, para ser composta por 1000 marcações, pode decorrer da demanda de cálculos a serem realizados com a escala serem supridos somente com 100 divisões; de os cálculos não necessitarem de uma precisão rigorosa ou do tamanho da escala, já que essas marcações ficariam muito próximas.

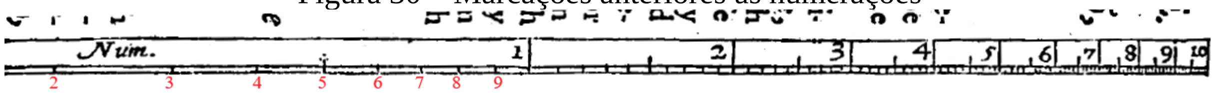
Figura 29 – 100 primeiras marcações da escala dos números



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

O mesmo procedimento é feito para as marcações restantes do logaritmo de 3, 4 até o logaritmo de 10, logo, compondo a escala com 100 divisões, como apresenta Gunter (1623). Observa-se que, na imagem da escala dos números, há alguns traços antes das numerações, eles correspondem aos logaritmos de 2 até o 9 (Figura 30) e auxiliam no uso da escala.

Figura 30 – Marcações anteriores às numerações



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Essas divisões no começo da escala podem indicar que ela é disposta consecutivamente, ou seja, uma escala depois da outra, alinhando o número 1 com a numeração 10, formando uma escala maior, atendendo a algumas necessidades ao manipulá-la, como é visto no tópica a seguir a respeito dos usos para encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua e para obter a média proporcional de dois números dados.

3.4 Manuseio da escala dos números

A escala dos números é utilizada para vários fins, perpassando por cálculos aritméticos, astronômicos e combinada com outras escalas das proporções. Gunter (1623) apresenta, ainda no primeiro livro sobre o *Cross-staff*, em particular, no capítulo seis, os usos gerais para a escala dos números.

Nessa parte do documento, Gunter (1623) mostra dez usos para a escala dos números:

a) tendo dois números dados, para encontrar um terço em proporção contínua, um quarto, um quinto e assim por diante;
b) tendo dois números extremos dados, para encontrar uma média proporcional entre eles;
c) para encontrar a raiz quadrada de qualquer número dado;
d) tendo dois números extremos dados, para encontrar dois proporcionais médios entre eles;
e) para encontrar a raiz cúbica de um número fornecido;
f) para multiplicar um número por outro;
g) para dividir um número por outro;
h) três números sendo dados, para encontrar um quarto proporcional;
i) três números sendo dados, para encontrar um quarto em uma proporção duplicada;
j) três números sendo dados, para encontrar um quarto em uma proporção triplicada.

A ordem de apresentação desses manuseios pelo autor não é leviana, haja vista que as ideias dos usos se complementam, pois estão dispostos de tal forma que há uma relação, por exemplo, do primeiro procedimento para encontrar um terço em proporção contínua com o segundo para obter uma média proporcional. Essas duas manipulações são mais discutidas nos tópicos posteriores.

3.4.1 Proporção contínua na escala dos números

O primeiro uso que Gunter (1623) traz sobre a escala dos números é o manuseio para encontrar um terço em proporção contínua[62], um quarto, um quinto etc., considerando dois números. Assim, o autor apresenta uma manipulação elementar, que perpassa por vários outros usos da escala, obedecendo a uma sequência de ideias que se complementam.

[62] O termo proporção contínua também se encontra nos tratados sobre logaritmos, como o de Briggs (1628), o que vai ao encontro ao conhecimento incorporado na escala.

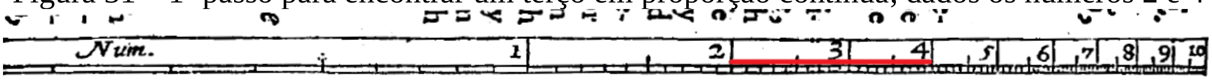
Gunter (1623, p. 18, tradução nossa) apresenta esse manuseio como se segue: “tendo dois números dados, para encontrar um terço em proporção contínua, um quarto, um quinto e assim por diante”[63]. Então, para essa manipulação, é preciso, além da escala dos números e do compasso, dois números em proporção contínua.

Em seguida, o autor descreve como decorre o procedimento de manipulação, logo, é indispensável que se “estenda o compasso do primeiro número para o segundo; então você pode transformá-los do segundo para o terceiro, e do terceiro para o quarto, e assim por diante” (GUNTER, 1623, p. 18, tradução nossa)[64]. Quando o autor diz para transformar os números do segundo para o terceiro, corresponde a posicionar um pé do compasso no segundo número e, desse modo, será identificado, no outro pé do compasso, o terceiro proporcional na escala e assim por diante.

O autor ainda traz um exemplo para esse uso, ele propõe: “deixe os dois números dados serem 2 e 4, estenda o compasso de 2 para 4, então você poderá transformá-los de 4 para 8, e de 8 para 16, e de 16 para 32, e de 32 para 64 e de 64 para 128” (GUNTER, 1623, p. 18, tradução nossa)[65]. Dessa maneira, são necessários dois passos para encontrar um terço da proporção contínua de 2 e 4.

O primeiro procedimento é colocar um pé do compasso no número 2 na escala dos números e o outro no número 4, obtendo no compasso a distância correspondente entre 2 e 4, como observa-se, na Figura 31, a representação do espaço registrado pelo compasso com o segmento realçado em vermelho.

Figura 31 – 1º passo para encontrar um terço em proporção contínua, dados os números 2 e 4



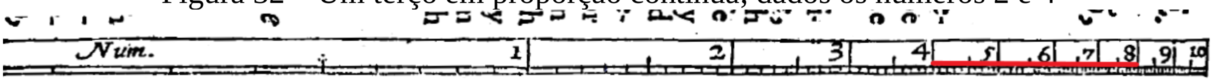
Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

O próximo movimento com o compasso, para obter um terço em proporção contínua, é manter a distância registrada entre os números 2 e 4 e posicionar um pé do compasso no 4, portanto, encontra-se um terço proporcional na marcação que a ponta do compasso cair, nesse caso, verifica-se, nesse procedimento, o número 8, como destacado na Figura 32.

---

63 Lê-se no original: “Having two numbers given, to find a third in continual proportion, a fourth, a fifth, and so forward. Extend the compasses from the first number unto the second; then may you turn them from the second to the third, and from the third to the fourth, and so forward” (GUNTER, 1623, p. 18).
64 Lê-se no original: “Extend the compasses from the first number unto the second; then may you turn them from the second to the third, and from the third to the fourth, and so forward” (GUNTER, 1623, p. 18).
65 Lê-se no original: “Let the two numbers given be 2 and 4, extend the compasses from 2 to 4, then you may turn them from 4 to 8, and from 8 to 16, and from 16 to 32, and from 32 to 64, and from 64 to 128” (GUNTER, 1623, p. 18).

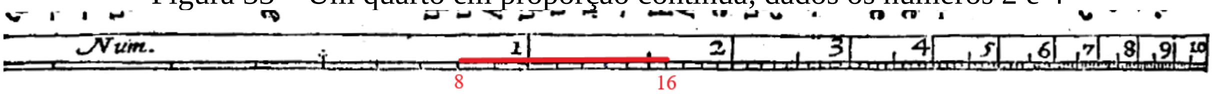
Figura 32 – Um terço em proporção contínua, dados os números 2 e 4



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Ainda considerando o exemplo de Gunter (1623), com os mesmos números dados anteriormente, 2 e 4, encontrou-se um terço proporcional igual a 8, seguindo os passos descritos pelo autor. Avançando na manipulação, para encontrar um quarto em proporção contínua, deve-se seguir os passos anteriores, ou seja, considerando a mesma distância entre 2 e 4, posicionando a ponta seca no 8, o próximo proporcional será encontrado no outro pé do compasso, entretanto, fazendo-se esse procedimento, a ponta do compasso sai da escala. Nesse caso, considera-se a marcação do número 8 no início, nela, é posicionado o compasso e, ao se verificar o número encontrado, considera-se não mais 1,6, e sim 16, uma vez que sempre que se faz o movimento de voltar para o começo da escala, ela é multiplicada por 10 a partir da numeração 1. Desse modo, a partir da marcação 1, a escala foi multiplicada por 10 por conta desse procedimento de encontrar um número no início (Figura 33).

Figura 33 – Um quarto em proporção contínua, dados os números 2 e 4



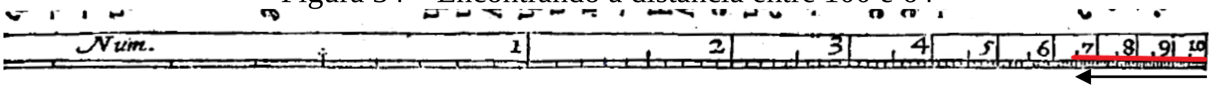
Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Procede-se da mesma maneira para se obter os demais proporcionais, mas há situações em que é imprescindível manipular de forma diferente para encontrar um número no começo da escala. Gunter (1623, p. 18, tradução nossa)[66] explica que, “[...] se um pé do compasso estiver definido como 64, o outro cair fora da escala, você pode configurá-lo para outro 64 mais próximo do início da escala [...]”. Isto é, se uma ponta do compasso cair fora da escala, é preciso transformar o proporcional anterior para o começo da escala, se ele não estiver marcado, como no caso do número 8, é necessário configurá-lo.

Considerando o exemplo expresso por Gunter (1623), deve-se configurar o 64 para o começo da escala, então, é preciso centrar um pé do compasso na marcação 100, haja vista que a escala foi multiplicada por 10, anteriormente, ao encontrar o 8 no começo, e a outra ponta em 64, assim, fazendo o movimento do compasso da direita para a esquerda, como observado na Figura 34.

[66] Lê-se em inglês: “[…] if one foot of the compasses being set to 64, the other fall out of the line, you may set it to another 64 nearer the beginning of the line […]” (GUNTER, 1623, p. 18).

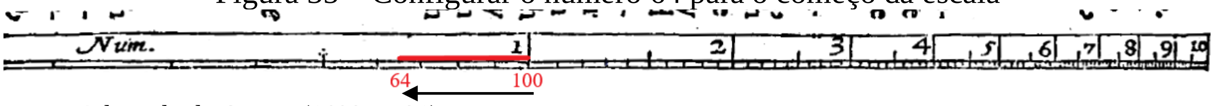
Figura 34 – Encontrando a distância entre 100 e 64



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Conservando a distância registrada no compasso entre 100 e 64, para configurar o 64 para o começo da escala, é necessário fixar um pé do compasso no 100 do começo da escala, dado que se retornou para o início da escala, multiplicando-a por 10 novamente, e a outra ponta marca um outro 64, como mostra a Figura 35.

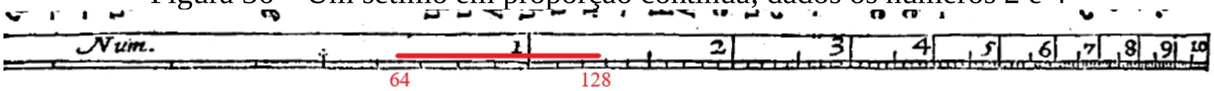
Figura 35 – Configurar o número 64 para o começo da escala



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Já se tendo configurado o 64 para o começo da escala, para encontrar o próximo proporcional, basta considerar a distância entre 2 e 4, posicionar um pé do compasso na marcação do 64 no começo da escala e, na outra ponta do compasso, achar-se-á 128 como o sétimo proporcional (Figura 36).

Figura 36 – Um sétimo em proporção contínua, dados os números 2 e 4



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Essa manipulação é possível por causa do conhecimento matemático incorporado na escala, o logaritmo, que, em seu uso, não fica explícito, mas é o responsável para que os resultados sejam proporcionais. Portanto, os logaritmos são responsáveis pelos resultados dos manuseios dessa escala. Destarte, tendo em vista os números dados 2 e 4, em razão dos logaritmos, o compasso registra a distância entre esses dois números, logo, tem-se, na Matemática moderna,

$$\log 4 - \log\ 2 = \log\frac{4}{2} = \log 2$$

Esse procedimento se justifica pelo tratado *Arithmetica logarithmica*, em que Briggs (1628, p. 19, tradução nossa) afirma que, “se o logaritmo do denominador for retirado do logaritmo do numerador, permanece o logaritmo da fração”. Dessa forma, a distância entre 2 e 4 coincide com o logaritmo de 2. Assim, para obter a terceira proporcional, é preciso somar-se à proporcional anterior 4, a distância que condiz ao logaritmo de 2, tem-se em notação matemática moderna que

$$\log 4 + \log 2 = \log 4 \cdot 2 = \log 8$$

Esse procedimento de transformar a soma de logaritmos em multiplicação se evidencia pela proposição de Briggs (1628, p. 2, tradução nossa)[67], na qual ele destaca que "o logaritmo do produto é igual aos logaritmos dos fatores". Ressalta-se que vale a recíproca, justificando a soma dos logaritmos igual à multiplicação.

Realizando-se esse processo com os logaritmos, é possível desvelar o conhecimento incorporado ao encontrar um terço em proporção contínua, que equivale a 8; um quarto igual a 16 e assim por diante, o procedimento matemático incorporado é análogo, ou seja, para achar a quarta e quinta proporcional, segue

$$\log 8 + \log 2 = \log 8 \cdot 2 = \log 16$$

$$\log 16 + \log 2 = \log 16 \cdot 2 = \log 32$$

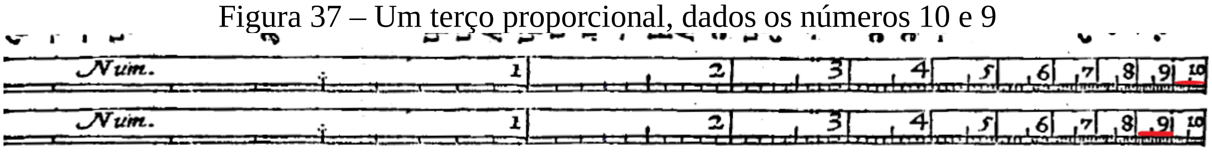
Em resumo, dados os números 2 e 4, a distância entre eles na escala corresponde à distância do logaritmo de 2, desse modo, um terço em proporção contínua é encontrado adicionando, a partir da marcação 4, a distância equivalente ao logaritmo de 2, obtendo 8 como resultado. Para encontrar os demais termos dessa proporção contínua, um quarto, um quinto em diante, a manipulação é semelhante.

Ainda para a proporção contínua, Gunter (1623, p. 18-19, tradução nossa)[68] acrescenta que

> [...] se os dois primeiros números dados fossem 10 e 9: estenda o compasso de 10 no final da escala, de volta para 9, então você poderá transformá-los de 9 para 8,1 e de 8,1 para 7,29. E assim, se os dois primeiros números dados fossem 1 e 9, o terceiro seria 81, o quarto 729, com a mesma extensão do compasso.

Logo, o movimento do compasso na escala acontece da direita para a esquerda como mostra a Figura 37, haja vista que a proporção contínua, nesse caso, decresce.

Figura 37 – Um terço proporcional, dados os números 10 e 9



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

[67] Lê-se no original: "Logarithmum facti æquari Logarithmis facientium" (BRIGGS, 1628, p. 2).
[68] Lê-se no original: "[…] if the two first numbers given were 9 and 10: extend the compasses from 10 at the end of the line, back unto 9, then you may turn them from 9 unto 8,1, and from 8,1 unto 7,29. And so, if the two first numbers given were 1 and 9, the third would be found to be 81, the fourth 729, with the same extent of the compasses" (GUNTER, 1623, p. 18-19).

Diante disso, são dados os números 10 e 9, obtém-se, nessa situação, uma proporção contínua decrescente, com um terço sendo 8,1 e um quarto 7,29. Em notação moderna, observa-se que

$$\log 9 - \log 10 = \log \frac{9}{10} = \log 0{,}9$$

Com isso, em razão dos logaritmos da escala, será adicionado ao logaritmo de 9 o logaritmo de 0,9 para se obter um terço em proporção contínua, tem-se matematicamente

$$\log 9 + \log 0{,}9 = \log 9 \cdot 0{,}9 = \log 8{,}1$$

Portanto, para encontrar um quarto em proporção contínua, o procedimento matemático é idêntico ao anterior. Nota-se que, nesse exemplo proposto por Gunter (1623), os números estão em uma sequência que decresce a cada proporcional encontrado, visto que a proporção, no caso dos números dados 10 e 9, corresponde ao logaritmo de 0,9.

Da mesma forma, "[...] se os dois primeiros números fossem 10 e 12, você pode encontrar o terceiro proporcional em 14,4, o quarto 17,28. E com a mesma extensão do compasso, se os dois primeiros números fossem 1 e 12, o terceiro seria 144 e o quarto 1728" (GUNTER, 1623, p. 19, tradução nossa)[69]. No primeiro caso, dados os números 10 e 12, a proporção contínua se daria como vista na Figura 38.

Figura 38 – Terceiro e quarto proporcionais, dados os números 10 e 12

Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Nessa conjuntura, a proporção cresce pela multiplicação dos termos por 1,2, ou seja, acrescentando aos termos, na escala, o logaritmo de 1,2. Já dados os números 1 e 12, com a mesma extensão do compasso, os números cresceram pela multiplicação de 12, em outras palavras, adicionando aos elementos da proporção contínua, na escala, o logaritmo de 1,2 vezes 10, em linguagem matemática

$$\log 12 - \log 1 = \log 12 = \log 1{,}2 \cdot 10$$

Como visto antes, a multiplicação por 10 é intuitiva ao manipular essa escala, logo, é mais simples fazer esse procedimento a encontrar a distância de 1 a 12, por essa razão, Gunter

[69] Lê-se no original: "[…] if the first two numbers were 10 and 12, you may find the third proportional to be 14,4, the fourth 17,28. And with the same extent of the compasses, if the first two numbers were 1 and 12, the third would be found to be 144, and the fourth to be 1728" (GUNTER, 1623, p. 19).

(1623) sugere considerar a mesma distância como se os números dados fossem 10 e 12, então, basta realizar a multiplicação por 10 no terceiro proporcional encontrado e assim por diante.

Esse é o manuseio da escala dos números para encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua dados dois números. Essa proporção pode ser crescente, como o primeiro exemplo que Gunter (1623) traz, ou pode ser decrescente, como visualizado anteriormente. O próximo uso apresentado pelo autor está diretamente relacionado com a proporção contínua.

3.4.2 Média proporcional na escala dos números

A média proporcional é o segundo manuseio apresentado por Gunter (1623, p. 19, tradução nossa)[70], em que ele enuncia: "Tendo dois números extremos dados, para encontrar uma média proporcional entre eles". Os números extremos são as marcações em que serão dispostas as pontas do compasso, o autor, brevemente, diz como ocorre a manipulação: "divida o espaço entre os números extremos em duas partes iguais, e o pé do compasso permanecerá na proporcional média" (GUNTER,1623, p. 19, tradução nossa)[71]. Com isso, o compasso registra a distância entre os dois números dados e, achando a metade dessa distância, verifica-se, na escala, a média proporcional desses números.

O autor indica que é necessário dividir o espaço coletado pelo compasso em duas partes iguais, porém não traz nenhuma explanação sobre como realizar esse procedimento. Entretanto, no século XVII, *Os Elementos*, de Euclides, já havia sido traduzido para o latim e o inglês[72], desse modo, há grandes chances de Gunter ter conhecimentos aprofundados sobre esse estudo, uma vez que cita a proposição seis no primeiro livro sobre o instrumento Setor. Por isso, o procedimento de dividir um determinado espaço em duas partes iguais pode ser retirado desse estudo sobre geometria.

O autor complementa o uso da média proporcional com um exemplo: "portanto, os números extremos dados como 8 e 32, a média entre eles será 16, o que pode ser comprovado pela antiga proposição, onde foi mostrado, que como 8 a 16, também são 16 a 32" (GUNTER,

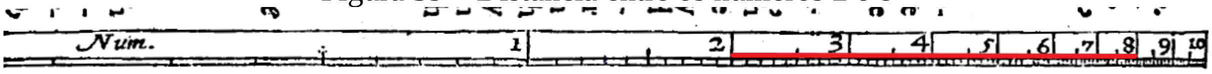
---

[70] Lê-se em inglês: "Having two extreme numbers given, to find a mean proportional between them" (GUNTER,1623, p. 19).
[71] Lê-se no original: "Divide the space between the extreme numbers into two equal parts, and the foot of the compasses will stay at the mean proportional" (GUNTER, 1623, p. 19).
[72] Para mais informações sobre as traduções de Euclides, vide: Corry (2013) e Saito (2015).

1623, p. 19, tradução nossa)[73]. Ao se referir à antiga proposição, Gunter (1623) retoma a proporção contínua, ou seja, é possível encontrar uma sequência de números proporcionais entre si.

Dessa forma, considerando os números dados por Gunter (1623) como exemplo, 2 e 8, é preciso estender os pés com compasso do número 2 até o número 8, obtendo-se a distância no compasso correspondente ao segmento em vermelho, na Figura 39.

Figura 39 – Distância entre os números 2 e 8



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Com a distância marcada com o compasso, é necessário dividir o espaço registrado em duas partes iguais. Como dito anteriormente, o autor tinha conhecimento sobre as construções postas no estudo de Euclides, logo, presume-se que ele sabia dividir um determinado espaço em duas partes iguais, em particular, considerando as proposições I.1, I.9 e I.10.

Dada a proposição I.1 sobre construir um triângulo equilátero sobre uma reta limitada dada, sendo ela a distância registrada pelo compasso ao posicionar suas pontas na marcação 2 e 8 na escala, tem-se

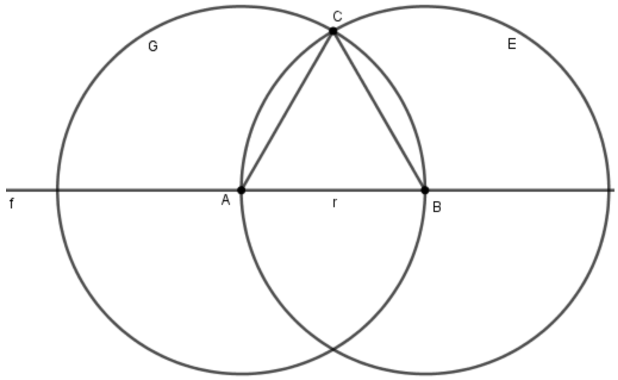
> Seja a reta limitada dada AB. É preciso, então, sobre a reta AB construir um triângulo equilátero.
> Fique descrito, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AB, o círculo BCD, e, de novo, fique descrito, por um lado, com o centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE, e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, fiquem ligadas as retas CA, CB.
> E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB; de novo, como o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual à BA. Mas a CA foi também provada igual à AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual à CB, portanto, as três CA, AB, BC são iguais entre si.
> Portanto, o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada dada AB.
> [Portanto, sobre a reta limitada dada, foi construído um triângulo equilátero]; o que era preciso fazer (EUCLIDES, 2009, p. 99).

Dessa forma, em linguagem matemática moderna, tendo uma reta f com os pontos A e B formando o segmento $\overline{AB}$, traça-se um círculo E(B, r) com centro em B e raio r correspondente ao segmento $\overline{AB}$. Analogamente, constrói-se o círculo G(A, r) e os segmentos

[73] Lê-se no original: “So the extreme numbers given being 8 and 32, the mean between them will be found to be 16, which may be proved by the former *Prop*. where it was shewed, that as 8 to 16, so are 16 to 32” (GUNTER, 1623, p. 19).

$\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, dessa maneira, os círculos têm o mesmo raio. Como $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ também são raios dos círculos, o triângulo ABC é equilátero, observa-se essa construção na Figura 40.

Figura 40 – Representação da construção de um triângulo equilátero



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

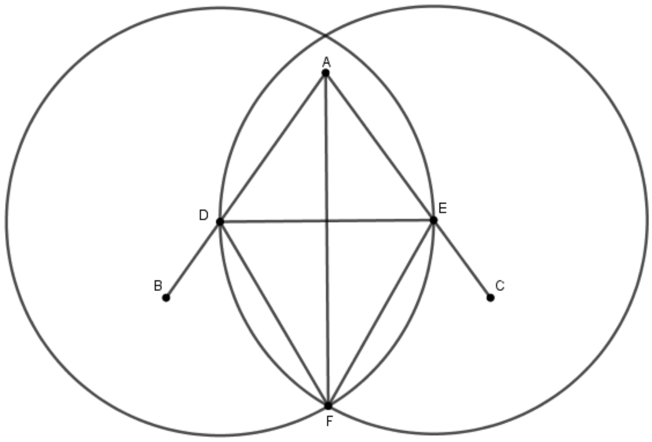
Feita a construção do triângulo equilátero, considera-se a proposição I.9 para cortar em dois um ângulo retilíneo[74] dado, tem-se:

> Seja o ângulo retilíneo dado o sob BAC; é preciso, então, cortá-lo em dois.
> Fique tomado sobre a AB o ponto D, encontrado ao acaso, e fique subtraída da AC a AE igual à AD, e fique ligada a DE, e fique construído sobre a DE o triângulo equilátero DEF, e fique ligada a AF; digo que o ângulo sob BAC foi cortado em dois pela reta AF.
> Pois, como a AD é igual à AE, e a AF é comum, então, as duas DA, AF são iguais às duas EA, AF, cada uma a cada uma. Também a base DF é igual à base EF; portanto, o ângulo sob DAF é igual ao ângulo sob EAF.
> Portanto, o ângulo retilíneo dado, o sob BAC, foi cortado em dois pela reta AF; o que era preciso fazer (EUCLIDES, 2009, p. 105).

Assim, para dividir o ângulo $B\hat{A}C$, em notação moderna, determina-se um ponto D arbitrário no segmento AB, depois, traça-se o segmento $\overline{AE} = \overline{AD}$ em $\overline{AC}$. É preciso traçar um triângulo equilátero tomando por base o raio igual a $\overline{ED}$, vide proposição I.1 para isso. Em seguida, constrói-se o segmento $\overline{AF}$, que divide o ângulo $B\hat{A}C$ em dois congruentes, como se apresenta visualmente na Figura 41.

[74] Por ângulo retilíneo, define-se "[...] quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilíneo" (EUCLIDES, 2009, p. 97).

Figura 41 – Representação da construção para divisão de ângulo em duas partes iguais



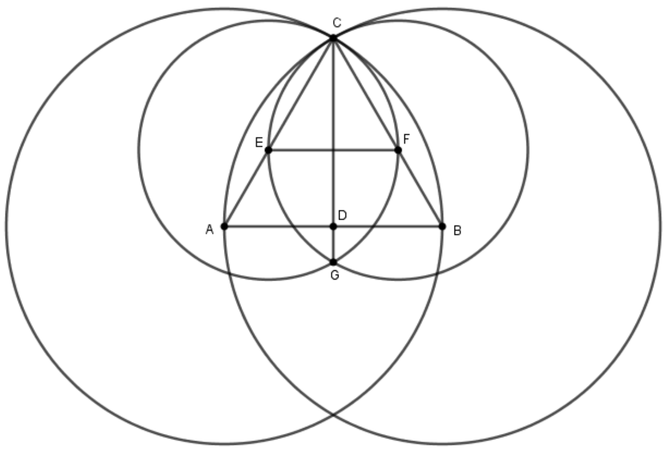
Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Com o procedimento de dividir um ângulo retilíneo em duas partes, decorre a proposição I.10, para se dividir um segmento em duas partes iguais, segue-se:

> Seja a reta limitada dada AB; é preciso, então, cortar a reta limitada AB em duas.
> Fique construído sobre ela o triângulo equilátero ABC, e fique cortado o ângulo sob ACB em dois pela reta CD; digo que a reta AB foi cortada em duas no ponto D.
> Pois, como a AC é igual à CB, e a CD é comum, então, as duas AC, CD são iguais às duas BC, CD, cada uma a cada uma; e o ângulo sob ACD é igual ao ângulo sob BCD; portanto, a base AD é igual à base BD.
> Portanto, a reta limitada dada AB foi cortada em duas no D; o que era preciso fazer (EUCLIDES, 2009, p. 106).

Essa proposição demonstra que, tendo-se uma reta limitada, ou seja, um segmento $\overline{AB}$ e, a partir dele construir um triângulo equilátero (Proposição I.1), em seguida, dividir o ângulo $A\widehat{C}B$ em dois (Proposição I.9), os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{DB}$ são congruentes. Verifica-se a representação dessa proposição na Figura 42, contando com todas as construções anteriores.

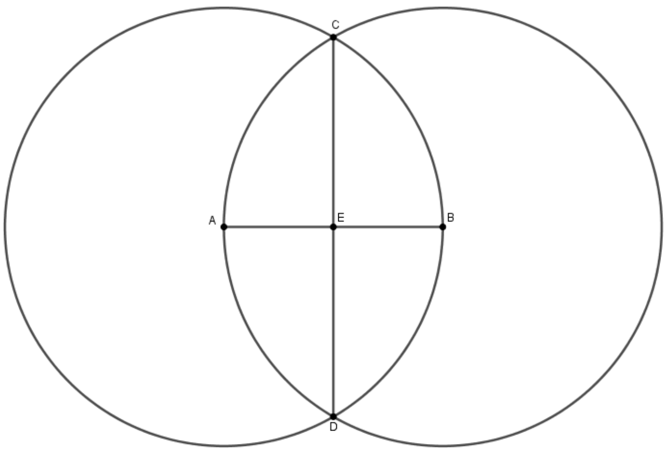
Figura 42 – Representação da divisão de um segmento em duas partes iguais



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Denota-se, com essas proposições, que elas se complementam, além disso, é possível omitir alguns passos para se obter a resolução da divisão de um segmento dado $\overline{AB}$ em duas partes, que é o proposto por Gunter (1623). Pode-se ocultar os procedimentos de traçar os lados do triângulo equilátero na proposição I.1, pois o objetivo não é encontrar esse triângulo. No processo de cortar um ângulo pela metade (proposição I.9), basta considerar o ponto arbitrário sendo o próprio A, assim, usa-se os dois círculos já feitos no processo da proposição I.1, dessa maneira, traça-se um segmento com as extremidades correspondentes às interseções dos círculos, obtendo-se a divisão do ângulo em duas partes iguais e do segmento da base, como demonstra a proposição I.10. Vê-se, na Figura 43, como fica esse processo de maneira simplificada.

Figura 43 – Representação de como dividir um segmento em duas partes iguais de maneira simplificada



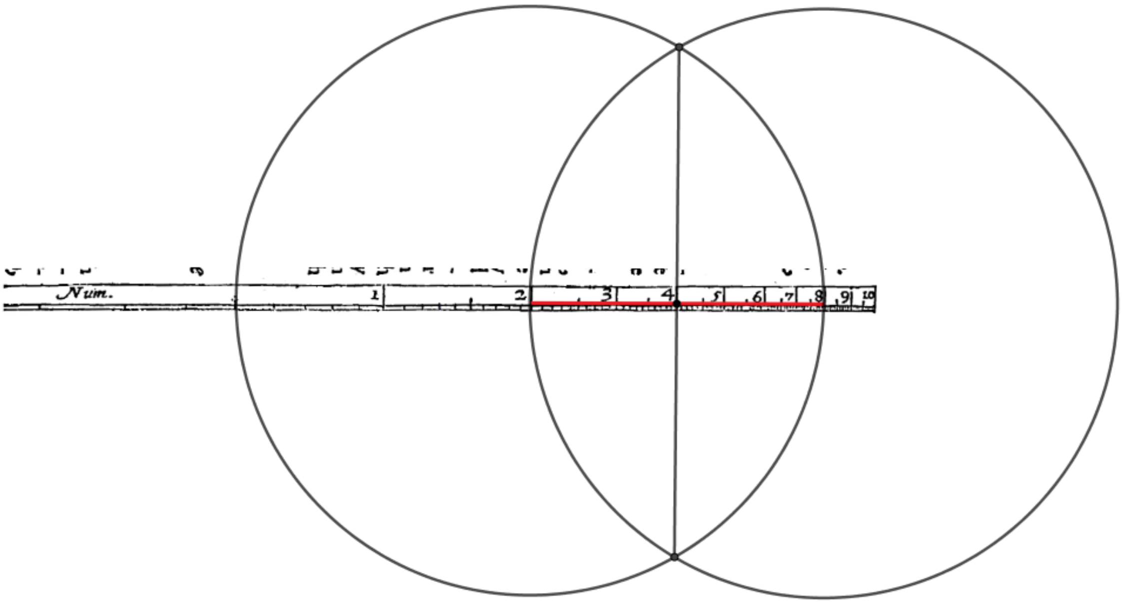
Fonte: Elaborada pela autora.

Vale ressaltar que esses procedimentos expostos nas proposições podem ser realizados somente contando com o auxílio de régua não graduada e de compasso, como provavelmente Gunter (1623) fez, usou-se aqui um recurso tecnológico apenas para melhor ilustrar as construções.

Desse modo, seguindo os passos simplificados, é possível dividir o segmento encontrado, concebendo a distância entre 2 e 8 na escala dos números em duas partes iguais. Considera-se a extremidade A o ponto onde o compasso toca o número 2 na escala; a outra extremidade, B, é o ponto correspondente ao 8 da escala dos números.

O segmento $\overline{AB}$, nesse caso, equivale à distância do logaritmo de 2 ao logaritmo de 8. Para encontrar a média proporcional, deve-se dividir essa distância em duas partes iguais. Seguindo o procedimento simplificado para isso, tem-se a representação na Figura 44, na qual se encontra o número 4 na escala.

Figura 44 – Achando a média proporcional, dados os números 2 e 8

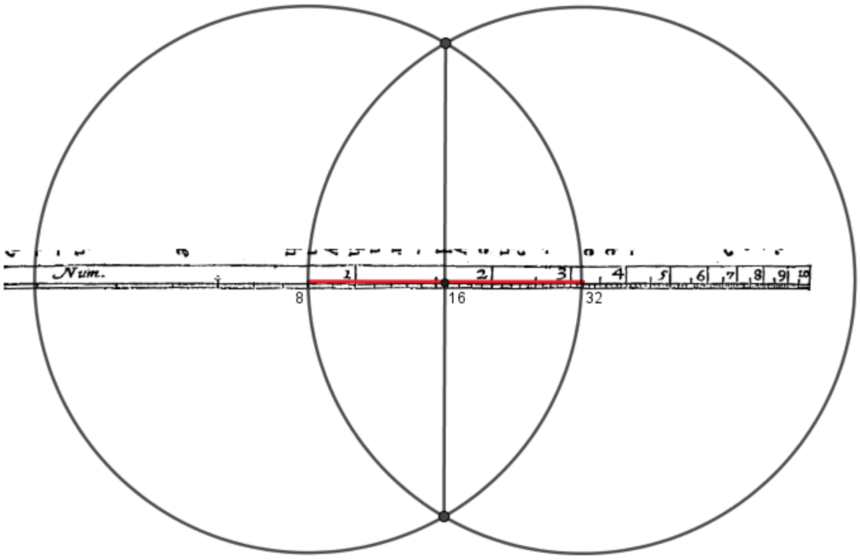


Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

O autor apresenta outro exemplo, tendo "[...] os números extremos dados como 8 e 32, a média entre eles será 16 [...]" (GUNTER, 1623, p. 19, tradução nossa)[75]. Para encontrar a média proporcional entre esses números, seguem-se os passos expostos anteriormente, contudo, deve-se considerar o 8 no começo da escala, transformando os números marcados em 10, 20, 30 etc., como se justificou no tópico sobre a proporção contínua. Assim, evidenciam-se, na Figura 45, os procedimentos para obter a média proporcional de 8 e 32.

[75] Lê-se no original: "So the extreme numbers given being 8 and 32, the mean between them will be found to be 16 […]" (GUNTER, 1623, p. 19).

Figura 45 – Média proporcional, dados os números 8 e 32



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Todos os manuseios, na escala, estão ancorados a partir dos logaritmos. Portanto, tendo em vista os números dados 8 e 32, o primeiro passo é registrar com o compasso a distância entre os dois números, logo, tem-se

$$\log 32 - \log 8 = \log \frac{32}{8} = \log 4$$

Destarte, a distância entre 8 e 32 equivale ao logaritmo de 4 da escala dos números. Esse procedimento também se justifica por Briggs (1628, p. 19, tradução nossa), em que afirma: "se o logaritmo do denominador for retirado do logaritmo do numerador, permanece o logaritmo da fração". Dessa maneira, para encontrar a média proporcional desses números, é necessário dividir a distância do logaritmo de 4 em duas partes iguais, ou seja, encontrar a raiz quadrada do logaritmo de 4. Tem-se matematicamente que

$$\log \sqrt{4} = \log \frac{4}{2} = \log 2$$

O procedimento de obter a raiz quadrada de um logaritmo se dá pela passagem: "Pois se a raiz quadrada é procurada, consideramos a metade do logaritmo dado [...]", de Briggs (1628, p. 31, tradução nossa)[76]. Desse modo, encontra-se o logaritmo que corresponde à distância de 8 para a média proporcional 16, ou, analogamente, de 32 para a média proporcional, como representa a Figura 46, destacando o segmento azul como o logaritmo de 2, comprovando a passagem em que Gunter (1623, p. 19, tradução nossa)[77] diz que "[...] pode ser comprovado

[76] Lê-se no original: "Vt si Quadrati latus quæritur, sumatur semissis dati Logarithmi [...]" (BRIGGS, 1628, p. 31).
[77] Lê-se no original: "[…] may be proved by the former *Prop.* where it was shewed, that as 8 to 16, so are 16 to 32" (GUNTER, 1623, p. 19).

pela antiga Proposição, onde foi mostrado, que como 8 a 16, também são 16 a 32”, assim, esses termos pertencem a uma proporção contínua.

Figura 46 – Representação da média proporcional de 8 e 32

Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Com esse procedimento, é possível encontrar a média proporcional de dois números dados, utilizando as propriedades dos logaritmos de forma indireta ao se manipular a escala dos números, desenvolvida por Edmund Gunter. Esse uso da escala dos números é retomado no segundo livro sobre o *Cross-staff*, no qual o autor explana sobre diversas aplicações práticas para a utilização das escalas das proporções. O manuseio para se obter uma média proporcional é usado, por exemplo, para encontrar o lado de um quadrado, dados os lados de um retângulo de mesma superfície, relacionando a geometria e a aritmética, mobilizando, portanto, diversos saberes matemáticos, que serão explorados no próximo capítulo.

4 INTERFACE ENTRE HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA: POTENCIALIDADES DIDÁTICAS A PARTIR DA ESCALA DOS NÚMEROS

A articulação entre a história e o ensino de Matemática pode ocorrer de várias maneiras. Nesta pesquisa, optou-se por construir uma interface para aliar esses dois campos de investigação. Para isso, foi considerado o tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments…* e a escala dos números elaborada por Edmund Gunter, dos quais emergem diversos processos matemáticos que podem ser potencialmente didáticos. Dessa forma, foi apresentado, inicialmente, um estudo dos preceitos da interface entre história e ensino de Matemática pela proposta de Saito e Dias (2013).

No segundo momento, com base na concepção de interface, foram discutidas algumas potencialidades didáticas que emergem da construção e da manipulação da escala dos números, apresentada no estudo *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments…*; no que diz respeito ao tratado, encontra-se o manuseio proposto por Gunter (1623) para achar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua e a obtenção da média proporcional de dois números. Essas discussões foram amparadas em documentos oficiais brasileiros, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e em livros didáticos, em que se optou por utilizar a notação matemática moderna como forma de melhor compreensão dos conceitos matemáticos para o leitor.

4.1 Proposta de construção de Interface

Dentre as várias propostas que articulam a história e o ensino de Matemática, encontra-se a de Saito e Dias (2013), que partem de uma perspectiva historiográfica atualizada[78], prezando pelo processo de construção do conhecimento matemático em seu contexto histórico com vistas à elaboração de atividades voltadas para a formação de professores.

Essa interface se direciona para a elaboração de um "conjunto de ações e produções que promova a reflexão sobre o processo histórico da construção do conhecimento matemático para elaborar atividades didáticas que busquem articular história e ensino de matemática" (SAITO; DIAS, 2013, p. 92). Assim, a partir de um recurso potencialmente didático provindo da história, propõem-se iniciativas, na formação de professores, por meio da construção de algum

[78] Sobre historiografia, vide: Beltran, Saito e Trindade (2014) e Saito (2015).

conhecimento matemático, para que licenciandos ou professores em formação continuada tenham autonomia e criticidade para mudar sua prática.

No entanto, para a elaboração de atividades, é requerido um procedimento no qual o pesquisador precisa realizar um estudo sobre o recurso histórico escolhido para compor a interface. Esse recurso pode ser um documento, um instrumento, uma pintura, escultura etc. (SAITO, 2015), cujo estudo do artefato histórico[79] tem que ser realizado de forma a revelar o seu contexto de elaboração, em que vão se desvelar aspectos sociais, culturais, matemáticos, epistemológicos, entre outros.

Assim, com o estudo das três esferas de análise do documento e do instrumento escolhido para esta pesquisa, o tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments…* e a escala dos números, emergiram questões matemáticas e epistemológicas, que podem ser potencialmente didáticas[80] para o ensino de Matemática.

As potencialidades são percebidas a partir das vivências e da bagagem matemática do pesquisador/professor, por essa razão, as possibilidades didáticas de um recurso histórico não são dadas e nem únicas. Nesse viés de estudo do objeto histórico, acontecem dois movimentos: o contextual e o do pensamento. O primeiro está relacionado ao contexto histórico no qual o objeto escolhido foi elaborado. O segundo se refere ao pensamento que abrange a construção do conhecimento matemático envolvido (PEREIRA; SAITO, 2018).

Esses movimentos estão presentes tanto no estudo histórico como na atividade a ser aplicada na formação de professores, visto que se encontra orientada por uma intencionalidade delimitada pelo pesquisador/professor. Além disso, é preciso realizar um tratamento didático no material histórico a ser utilizado, levando-se em conta a intenção definida antes.

Entretanto, essa proposta não tem uma metodologia fixa para pautar a construção da atividade[81], nesta pesquisa, foi escolhida a Teoria da Objetivação para a elaboração de uma atividade que amparasse os pressupostos da interface, sendo ela um conjunto de ações produzidas, de tal forma, que levassem a uma reflexão sobre o processo de construção de um conhecimento matemático.

Dessa maneira, seguindo os pressupostos para a construção de uma interface[82], escolheu-se a escala dos números, elaborada por Gunter (1623), para ser estudada. A partir

[79] Para isso, é feita a análise das três esferas: contextual, historiográfica e epistemológica. Para mais informações, vide: Alfonso-Goldfarb (2008) e Ferraz, Alfonso-Goldfarb e Waisse (2013).
[80] Sobre potencialidade didática, vide: Dias e Saito (2014) e Pereira e Saito (2019b).
[81] Alguns estudos já apresentaram atividades pautadas em algumas metodologias para a construção de atividades, como o de Saito (2017).
[82] Vide: Saito (2015); Saito (2016a); Saito (2016b); Pereira e Saito (2019a) e Pereira e Saito (2019b).

disso, foram visualizadas algumas potencialidades didáticas, que emergiram por meio do manuseio dessa escala para dois usos que o autor traz em seu tratado, que foram apresentados no capítulo anterior e do saber matemático incorporado na escala dos números.

Através do estudo sobre a escala dos números e do seu manuseio para encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua e para obter a média proporcional de dois números, perceberam-se potencialidades didáticas que remetem ao conhecimento sobre logaritmos, proporcionalidade, sequência numérica e média geométrica, que serão apresentadas a seguir.

4.2 A escala dos números para o estudo sobre logaritmos

A escala dos números é construída a partir dos logaritmos decimais desenvolvidos por Briggs (1617) e, desse modo, ela incorpora conhecimentos e propriedades para vários fins. Entretanto, esse conhecimento direcionado aos logaritmos não está explícito ao se manusear a escala, pois é um processo intrínseco, visto que, se desenvolvido de forma apropriada, pode ser potencialmente didático para o estudo desse conteúdo na formação do professor de Matemática.

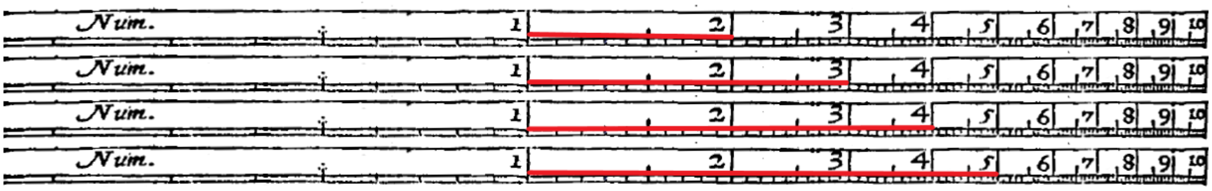
Considerando a escala dos números e as questões matemáticas que emergem tanto da construção como do seu manuseio, ela pode ser potencialmente didática para o ensino de diversos assuntos matemáticos, a depender da intencionalidade do pesquisador/professor, por exemplo, para o ensino de noções logarítmicas.

4.2.1 A reconstrução da escala dos números como potencialidade didática

Já foi visto que Gunter (1623, p. 2, tradução nossa) não dá detalhes de como construir a escala dos números, haja vista que só explicita sua descrição “[...] anotada com a letra N, dividida desigualmente em 1000 partes, e numerada com 1. 2. 3. 4. até 10” e que ela é retirada a partir do tratado de 1617, de Henry Briggs, sobre os logaritmos.

Com essas passagens do tratado de Gunter (1623), percebe-se o entrelaçamento de noções geométricas e aritméticas ao se associar os logaritmos a distâncias em uma linha. Nesse sentido, há várias maneiras de se construir a escala dos números. Tendo em vista que as propriedades logarítmicas e o manuseio da escala, por exemplo, para encontrar termos considerando uma proporção contínua, os segmentos de 1 a 2, 1 a 3, 1 a 4, 1 a 5 e assim por diante representam os logaritmos desses números, destacados em vermelho, como se observa na Figura 47.

Figura 47 – Distâncias correspondentes aos logaritmos



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Uma vez que se entende que os segmentos em vermelho são equivalentes aos logaritmos, pode-se pensar em artifícios para se reconstruir essa escala. Uma opção é considerar régua e compasso ou recursos tecnológicos, uma vez que a BNCC requer a aliança entre a Matemática e as tecnologias digitais da informação e comunicação (BRASIL, 2018), com esses materiais, estimula-se a noção geométrica dos alunos de como transpor um número para uma distância na unidade de medida desejada.

Nessa opção, reforçam-se elementos que aliam geometria e aritmética. Considerando o logaritmo de 1 igual a 0, ele será o ponto inicial para se construir os demais segmentos e todos vão partir dele, nisso, concentra-se a ideia de que se fosse construir o logaritmo de 3 a partir da marcação 2, a distância entre 1 e 3 seria correspondente ao logaritmo de 6, haja vista que seria a distância do logaritmo de 2 somada ao logaritmo de 3, como pode ser observado na Figura 48.

Figura 48 – Construção da escala não considerando 1 como ponto de partida

Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Nesse tipo de construção, o segmento $\overline{AB} = \log 2$ e o segmento $\overline{BC} = \log 3$, tendo em vista que a soma de segmentos corresponde à soma dos logaritmos, ou seja, a multiplicação, o segmento $\overline{AC} = \log 6$, construção que aponta para a propriedade de soma de logaritmo. Por essa razão, todos os segmentos são construídos a partir do ponto A, a marcação 1 (Figura 49).

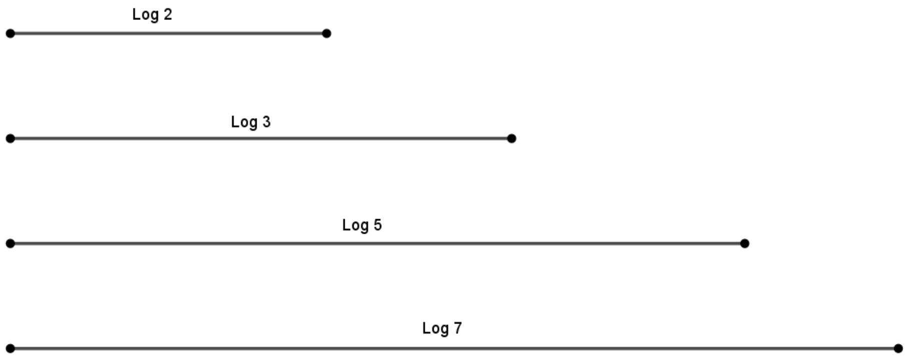
Figura 49 – construção considerando 1 como ponto de partida

Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Dessa maneira, surgem diversas questões matemáticas que podem ser exploradas, como a necessidade de todos os segmentos partirem da marcação 1, que decorre da propriedade dos logaritmos, que, se forem postos consecutivamente, a soma das distâncias multiplicaria as marcações da escala.

Outro aspecto matemático pode ser explorado se forem considerados os segmentos respectivos aos logaritmos dos números primos de 1 a 10. Portanto, dados os segmentos equivalentes aos logaritmos de 2, 3, 5 e 7 (Figura 50), é possível construir, com auxílio do compasso para marcar os números compostos, as 10 primeiras numerações da escala dos números, levantando, desse modo, questões sobre logaritmos e suas propriedades.

Figura 50 – Segmentos necessários para construção das 10 primeiras marcações da escala dos números



Fonte: Elabora pela autora (2021).

As demais marcações da escala remetem a questões mais elaboradas a respeito dos logaritmos, é preciso que se mobilizem conhecimentos de divisão na escala dos números, algo que é visto em um dos usos da escala, de dividir um número por outro. Mas, já com as primeiras marcações da escala, é possível constatar a mobilização de vários saberes matemáticos, que podem levar à construção ou à ressignificação de logaritmos e de suas propriedades.

4.2.2 Estudo sobre a noção logarítmica por meio da descrição e das ideias iniciais sobre o manuseio da escala dos números

Na descrição da escala, Gunter (1623, p. 2, tradução nossa) diz que a escala é “[...] dividida desigualmente em 1000 partes [...]”, pois a concepção primordial está vinculada aos logaritmos que têm valores diferentes e, ao serem transpostos para segmentos, assumem comprimentos desiguais. Nessa passagem, o logaritmo é concebido como divisões desiguais em uma linha, assim, articulando geometria e logaritmos no século XVII.

No século XXI, os logaritmos são vistos de forma diferente, nos livros didáticos da Educação Básica, de como são trazidos no tratado de Gunter (1623): “Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c é o **valor do logaritmo do número b na base a**. Podemos representar esta definição em símbolos: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$” (DANTE;

VIANA, 2020, p. 71). A definição dos livros utilizados no Ensino Superior é similar à trazida nos livros da Educação Básica, como a definição de Iezzi, Dolce e Murakami (2013, p. 57): "Sendo a e b números reais e positivos, com a $\neq 1$, chama-se logaritmo de b na base a o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b".

Uma discussão acerca do que se entende por logaritmo pode ser iniciada. Para Gunter (1623), a escala dos números incorpora o saber sobre logaritmo, considerando-o como um segmento, ou seja, um ente geométrico e, atualmente, é considerado um elemento aritmético ao associá-lo à exponencial.

Nesse caso, pode haver uma reflexão no que concerne à definição de logaritmos, que pode ser explorada ao se manusear a escala, uma vez que se faz uma soma de segmentos no uso da proporção contínua, por exemplo, e não, especificamente, uma soma de potências. Além disso, podem ser exploradas propriedades sobre potências se essa for a intenção do professor, visto que, em linguagem matemática moderna, considerando a manipulação da escala no uso da proporção contínua, tem-se, para encontrar um terço em proporção contínua, dados os números 2 e 4, a soma de segmento, matematicamente, observa-se:

$$\log 4 + \log 2 = \log 4 \cdot 2 = \log 8$$

Com base no conceito de logaritmo dos livros didáticos, segue em linguagem matemática que:

$$\log 4 = 10^{0.60205999133}$$

$$\log 2 = 10^{0.30102999566}$$

$$\log 8 = 10^{0.90308998699}$$

Considerando os logaritmos como potência de base 10, matematicamente, a manipulação da escala é justificada da seguinte forma:

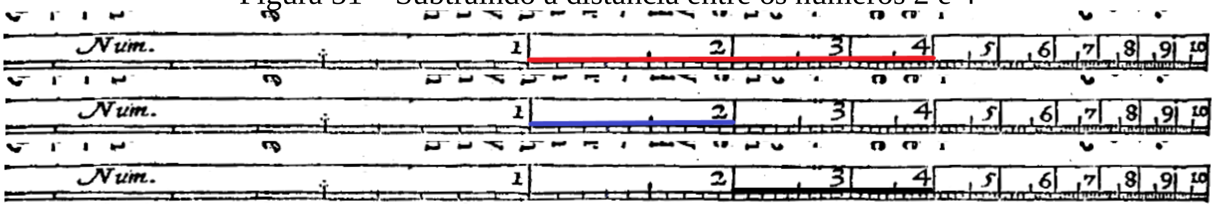
$$10^{0.60205999133} \cdot 10^{0.30102999566} = 10^{0.60205999133 + 0.30102999566} = 10^{0.90308998699} = 8$$

Assim, pode-se explorar tanto questões acerca da definição de logaritmo como mobilizar conhecimentos sobre potenciação, assuntos que são vistos separadamente nos materiais didáticos, discussão que reflete na organização do ensino de Matemática e dos livros didáticos.

Outras ações, na escala dos números, que mobilizam conhecimentos matemáticos, podem ser percebidas. Ela se apropria ainda mais dos logaritmos ao fazer uso de suas propriedades, especialmente, da propriedade de multiplicação e de divisão ao manuseá-la para encontrar um terço em proporção contínua e assim por diante, além da propriedade acerca da raiz quadrada de um logaritmo ao manipular a escala para obter a média proporcional de dois números.

Acerca da divisão de logaritmos, a ação está relacionada ao identificar a distância entre dois números. Nesse movimento com o compasso na escala, verifica-se o "comprimento do logaritmo", por exemplo, entre os números 2 e 4. Logo, é subtraído do segmento equivalente ao logaritmo de 4, destacado em vermelho, o comprimento correspondente ao logaritmo de 2, representado pelo segmento em azul, obtendo o segmento em preto, equivalente à distância entre 2 e 4, ou seja, o logaritmo de 2, como observado na Figura 51.

Figura 51 – Subtraindo a distância entre os números 2 e 4



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Nesse procedimento, a divisão está implícita ao se registrar a distância no compasso, mas é um ponto a ser explorado ao se investigar, pelos logaritmos, cada processo para manipular a escala. Esses processos matemáticos são particulares da escala e podem promover uma reflexão acerca da propriedade de divisão dos logaritmos, uma vez que é trazida, nos livros didáticos, a definição pautada em potências, assim, retoma-se a relação de ambas, podendo se iniciar a discussão do porquê de, na multiplicação de potências de mesma base, somar-se os expoentes, relacionando os logaritmos e o conceito sobre potência.

Já na passagem em que Gunter (1623, p. 18, tradução nossa) diz: "[...] se um pé do compasso estiver definido como 64, o outro cair fora da escala, você pode configurá-lo para outro 64 mais próximo do início da escala [...]", pode-se referir, também, à ideia logarítmica, uma vez que

$$\log 64 - \log 100 = \log \frac{64}{100} = \log 0{,}64 = \log 0{,}64 - \log 1$$

A ação na escala se configura de maneira direta, seguindo os passos de Gunter (1623), como visto na Figura 52. Assim, essa transformação a que o autor se refere é encontrar distâncias equivalentes de um número x até a marcação 10 (que pode assumir outros valores de potência de 10) e do começo da escala na marcação 1 ao correspondente do número x.

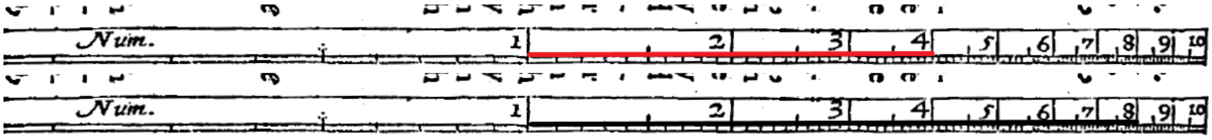
Figura 52 – Transformação de números

Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Se considerada a definição da escala dos números, dada por Gunter (1623), revela-se uma reflexão de como subtrair logaritmos e a percepção de que essa subtração, na escala, é uma divisão dos números e, a partir disso, explora-se a propriedade sobre divisão de logaritmos.

Da mesma forma, considerando a propriedade da multiplicação na escala, ela se encontra ao se somar os segmentos para se entrarem termos na proporção contínua, por exemplo, dados os números 2 e 4, um terço em proporção contínua corresponde a 8. A partir da marcação 4, adiciona-se o segmento correspondente ao logaritmo de 2, encontrando o terceiro proporcional na marcação 8, como mostra a Figura 53.

Figura 53 – Soma de segmentos para encontrar um terço em proporção contínua, dados os números 2 e 4



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Nesse caso, a manipulação da escala reflete as discussões de mesma natureza da que foi vista anteriormente sobre a propriedade dos logaritmos e a relação com a potência. Nesse sentido, podem-se abordar, dependendo da intencionalidade admitida, conteúdos sobre logaritmo, potência, relação entre os segmentos da escala e propriedade de multiplicação dos logaritmos, entre outros assuntos.

Com base na definição de Gunter (1623) da escala, a soma dos segmentos coincidentes com logaritmos equivale à multiplicação desses números. Já na definição moderna, recai na propriedade de multiplicação da potência, dada a multiplicação de potências de mesma base, somam-se os expoentes.

Em relação aos documentos oficiais, nesse cenário, a BNCC, não há nenhuma consideração sobre a relação entre esses assuntos no ensino de Matemática, segundo Radford (2021), isso acontece devido aos currículos de ensino serem tecnicistas e não prezarem por visões significativas para o ensino e a aprendizagem. Contudo, é interessante essa associação/relação entre entes matemáticos, que são vistos separadamente, pois o aluno pode construir um significado ou ressignificar um saber matemático.

Entretanto, considerando a intencionalidade de estudar as propriedades dos logaritmos, levando em conta a manipulação da escala dos números no uso de proporção contínua, mobiliza-se a competência específica três da BNCC para o Ensino Médio, de

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p. 527).

Dessa maneira, surge a importância da formação do professor, uma vez que, tendo a oportunidade de estudar a construção do conhecimento matemático e o funcionamento da escala dos números, é possível delinear atividades que prezem pelo processo de elaboração da ideia matemática.

4.2.3 Elementos de geometria analítica: distância entre dois pontos a partir dos logaritmos

Tendo em vista conhecimentos sobre geometria, alguns aspectos são mobilizados ao se registrar a distância entre dois números dados na escala dos números, como elementos da geometria analítica acerca de distância entre dois pontos. Considerando um sistema de coordenadas logarítmicas, pode-se introduzir a ideia de distância entre dois pontos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, pela fórmula AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ (TEIXEIRA, 2020).

Tomando por base os números 8 e 32 e suas representações na escala, ou seja, os logaritmos desses números, tem-se

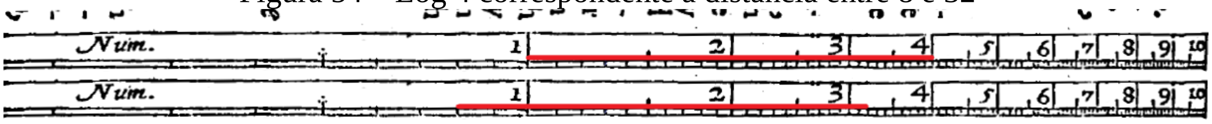
$$\sqrt{(\log 32 - \log 8)^2 - (\log 1 - \log 1)^2}$$

Como o logaritmo de 1 é igual a zero, segue-se

$$\sqrt{(\log 32 - \log 8)^2} = \sqrt{\left(log\,\frac{32}{8}\right)^2} = \sqrt{(\log 4)^2} = (\log 4)^{\frac{2}{2}} = \log 4$$

Desse modo, utilizando a fórmula para determinar a distância entre dois pontos, considerando os logaritmos, chega-se ao logaritmo de 4 como distância correspondente aos números 8 e 32, o que pode ser observado na Figura 54.

Figura 54 – Log 4 correspondente à distância entre 8 e 32



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Portanto, questões acerca de geometria analítica podem ser exploradas mediante o manuseio da escala dos números no que diz respeito à distância entre dois números, além de mobilizar conhecimentos sobre logaritmos. A BNCC não especifica habilidades ou competências em relação à geometria analítica. Já na formação inicial, há o estudo de geometria analítica próximo ao que é visto na Educação Básica.

4.3 A manipulação da escala dos números para encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua como ação para estudar aspectos matemáticos

Já foram vistas algumas potencialidades didáticas que emergem ao se estudar o conhecimento incorporado na reconstrução da escala dos números, elaborada por Edmund Gunter. No uso dessa escala, também, são percebidos processos que podem ser potencialmente didáticos para o ensino de Matemática.

Nesse sentido, apresentam-se, a seguir, algumas possibilidades didáticas da manipulação da escala dos números para se encontrar um terço em proporção contínua, um quarto, um quinto e assim por diante para o ensino de algumas relações e ideias matemáticas.

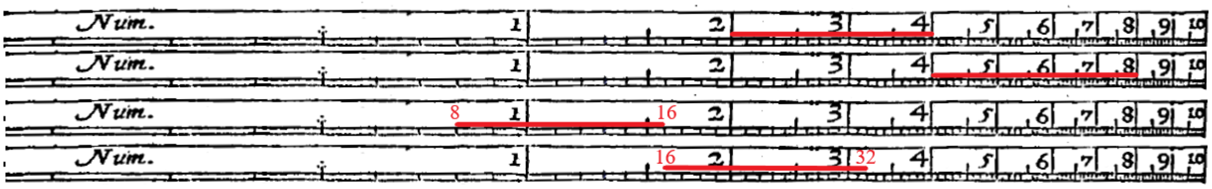
4.3.1 Mobilizando o conceito de progressão geométrica

Para a manipulação da escala dos números para encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua, dados dois números, Gunter (1623, p. 18, tradução nossa) diz:

> Estenda os compassos do primeiro número para o segundo; então você pode transformá-los do segundo para o terceiro, e do terceiro para o quarto, e assim por diante.
> Deixe os dois números dados serem 2 e 4, estenda o compasso de 2 para 4, então você poderá transformá-los de 4 para 8, e de 8 para 16, e de 16 para 32, e de 32 para 64 e de 64 para 128.

Essa sequência de números, 2, 4, 8, 16, 32..., é chamada por Gunter (1623) de proporção contínua, a obtenção desses termos está diretamente ligada aos logaritmos, pois ao se registrar a distância entre 2 e 4 na escala e, a partir dela, encontrar os demais termos, soma-se o segmento e multiplica-se o número (Figura 55).

Figura 55 – Termos da proporção contínua, dados os números 2 e 4 na escala dos números



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Percebe-se, na Figura 49, que o segmento em vermelho, representando a distância registrada pelo compasso, é o mesmo ao se achar os demais termos da proporção contínua. Esse segmento corresponde ao logaritmo de 2, uma vez que a distância entre 4 e 2, na escala, equivale ao logaritmo de 2. Assim, ele é adicionado a cada número para se achar o próximo, tendo isso em vista, tomando o conhecimento incorporado na escala, tem-se que

$$\log 4 + \log 2 = \log 4 \cdot 2 = \log 8$$

$$\log 8 + \log 2 = \log 8 \cdot 2 = \log 16$$

$$\log 16 + \log 2 = \log 16 \cdot 2 = \log 32$$

Logo, cada segmento respectivo ao logaritmo dos termos da proporção contínua menos o segmento anterior, ou seja, cada termo dividido pelo anterior, equivale ao logaritmo de 2, em outras palavras,

$$\log 4 - \log 2 = \log 4 \div 2 = \log 2$$

$$\log 8 - \log 4 = \log 8 \div 4 = \log 2$$

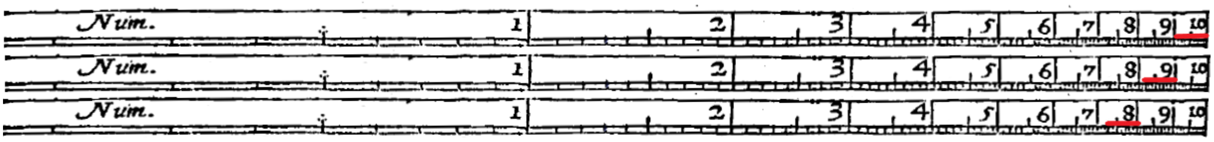
$$\log 16 - \log 8 = \log 16 \div 8 = \log 2$$

Percebe-se que o logaritmo de 2 é multiplicado por cada termo dessa sequência de números. Se for levado em conta a multiplicação dos números na escala, cada termo é multiplicado por 2, que remete a uma progressão geométrica, conhecimento utilizado para a construção dos logaritmos[83].

Gunter (1623, p. 18, tradução nossa) traz um exemplo de dois números dados, em que a proporção contínua decresce: “[...] se os dois primeiros números dados fossem 10 e 9: estenda o compasso de 10 no final da escala, de volta para 9, então você poderá transformá-los de 9 para 8,1 e de 8,1 para 7,29”, verifica-se na Figura 56.

[83] Sobre a construção dos logaritmos, vide: Roegel (2011), Pereira (2015) e Rice, González-Velasco e Corrigan (2017).

Figura 56 – Proporção contínua decrescente, dados os números 10 e 9



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Considerando o princípio matemático incorporado na escala, a distância entre 10 e 9 é igual ao logaritmo de 0,9, ou seja,

$$\log 9 + \log 0{,}9 = \log 9 \cdot 0{,}9 = \log 8{,}1$$

$$\log 8{,}1 + \log 0{,}9 = \log 8{,}1 \cdot 0{,}9 = \log 7{,}29$$

Analogamente,

$$\log 9 - \log 10 = \log 9 \div 10 = \log 0{,}9$$

$$\log 8{,}1 - \log 9 = \log 8{,}1 \div 9 = \log 0{,}9$$

$$\log 7{,}29 - \log 8{,}1 = \log 7{,}29 \div 8{,}1 = \log 0{,}9$$

Portanto, a partir da ideia de logaritmo tomando o manuseio da escala, é possível retomar o conceito de progressão geométrica, saber que está vinculado à construção do conhecimento logarítmico e pode haver a aliança entre esses dois entes matemáticos para ressignificar, tanto o logaritmo como a progressão geométrica.

No que se refere aos livros didáticos, “Progressão geométrica (PG) é toda sequência de números não nulos na qual o quociente entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior é constante. Esse quociente constante é chamado razão da progressão e é representado pela letra q” (DANTE; VIANA, 2020, p. 135). Percebe-se que não há nenhuma menção à relação de PG e logaritmos, isso fica mais evidente nos livros de nível superior, haja vista que os assuntos são trazidos em livros diferentes, desassociando-os completamente.

Pelo manuseio da escala dos números para a manipulação de proporção contínua, pode-se identificar os elementos que compõem a PG, como a razão e os termos da sequência, que podem ser crescentes, como o exemplo dado anteriormente ou decrescentes.

Dessa forma, a ação de encontrar a distância entre dois números e, a partir disso, encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua é potencialmente didática, tanto para abordar assuntos sobre progressão geométrica crescente e decrescente como a relação dela com os logaritmos, que são vistos separadamente de acordo com o currículo de ensino.

Com base nos documentos oficiais, a escala dos números pode promover reflexões acerca da competência específica 5 da BNCC, de

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões,

> experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 532).

Em particular, pode-se levar a habilidade (EM13MAT508) de “identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas” (BRASIL, 2018, p. 541). Esse caminho pode ser uma opção para o professor utilizar a escala dos números ou a ideia advinda dela com essa manipulação, a fim de alcançar a competência e a habilidade destacadas.

Assim, com a manipulação da escala para encontrar os termos da proporção contínua, percebem-se padrões à medida que se encontram os elementos da sequência, podendo-se levantar hipóteses da natureza da sequência que vai se formando, introduzindo, dessa forma, o conceito de PG ou da fórmula para encontrar termos, um termo n da sequência.

No que diz respeito à formação inicial, os livros didáticos utilizados no Ensino Superior tratam sobre progressão geométrica de forma análoga aos livros direcionados à Educação Básica, como o de Iezzi e Hazzan (2013a), que tratam a progressão geométrica como um saber desvinculado do logaritmo.

Contudo, com a formação orientada ao estudo do processo de elaboração do conhecimento matemático, o professor, na prática, pode ter autonomia e escolher como abordar os assuntos de PG e logaritmos, optando por reformular a ordem de apresentação ou relacionar os dois assuntos, algo que diverge da organização desses conteúdos matemáticos nos livros didáticos, mas que enfatiza o modo de construção do conhecimento matemático.

Com a manipulação da escala dos números, a relação entre os logaritmos, a potência e a progressão geométrica não é única ao se considerar a proporção contínua, a relação entre logaritmo e proporcionalidade também pode ser potencial para o ensino, como pode ser visto a seguir.

4.3.2 Ideias acerca da proporcionalidade

Tendo como intencionalidade abordar questões sobre proporcionalidade a partir da manipulação da escala os números para o uso de proporção contínua, entendem-se, como razões, os termos da sequência de uma proporção contínua. Por exemplo, dados os números 2 e 4, os termos da sequência podem ser vistos como uma razão.

Desse modo, “a razão entre os números x e y, nesta ordem, com y ≠ 0, pode ser indicada pela fração $\frac{x}{y}$ ou pelo quociente x : y” (PATARO; BALESTRI, 2018a, p. 215). Verifica-se que, se considerado o exemplo com os números 2 e 4, a razão se configura como a fração $\frac{2}{4}$ ou pelo quociente 2 : 4.

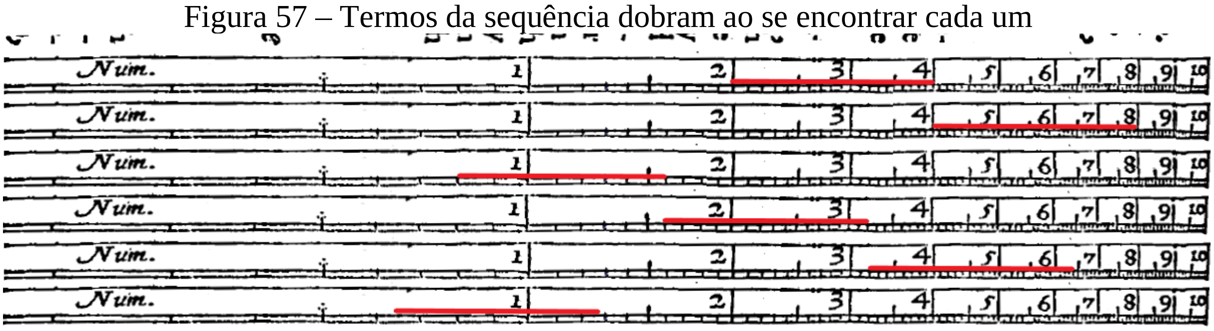
Uma discussão pode surgir em relação à simplificação da fração ou do quociente da divisão, haja vista que a fração e a representação de uma divisão, na maioria das vezes, são postas para encontrar um resultado pela divisão dos números, um contraponto deve ser enfatizado no caso da razão, uma vez que essas expressões são postas como uma representação dos números.

Dessa maneira, considerando os termos da proporção contínua (Figura 55) dos números 2 e 4, eles podem ser expressos como razões, visto que

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{16}{32} = \frac{32}{64} = \frac{64}{128}$$

Em outras palavras, se dividirmos um termo pelo anterior, temos o mesmo quociente: 2, logo, os números da sequência são obtidos pela multiplicação desse número, que remete à noção de proporção, pois “quando o valor de uma grandeza dobra, triplica ou é reduzido à metade, o valor da outra grandeza, que é diretamente proporcional a ela, também dobra, triplica ou é reduzido à metade” (DANTE, 2018, p. 212). Questão que é mais perceptível ao se manipular a escala e constatar os números da proporção contínua, como mostra a Figura 57.

Figura 57 – Termos da sequência dobram ao se encontrar cada um



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

O termo que multiplica cada termo corresponde ao valor associado ao segmento em vermelho, na Figura 57, ou seja, o logaritmo de 2. Dessa maneira, os números são diretamente proporcionais, sabendo-se disso, pode-se obter qualquer número dessa sequência com as informações que se tem, o que se reporta ao conhecimento de PG e a fórmula para encontrar um termo de uma PG, “é dado por: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, com $n \geq 1$, sendo q a razão da PG” (DANTE; VIANA, 2020, p. 137).

A partir da manipulação da escala, é possível chegar à fórmula do termo geral de uma progressão geométrica, fugindo, assim, do padrão de já apresentar ao aluno a fórmula pronta e estimular, utilizando a escala dos números, a construção dessa fórmula matemática, adotando uma perspectiva de elaboração do pensamento quanto ao que consiste em uma PG.

No que se refere à BNCC, o objeto de conhecimento em relação a essa manipulação da escala dos números, com a intenção de estudar proporcionalidade, está relacionado à “Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais” (BRASIL, 2018, p. 308). Isso está vinculado às habilidades:

> (EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.
> (EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas (BRASIL, 2018, p. 309).

Entretanto, na formação de professores, essa relação com a BNCC não é feita, inclusive, o assunto de proporcionalidade não é abordado diretamente na formação inicial, essa ideia só é vista na Educação Básica, desassociada de qualquer outro conhecimento sobre sequência ou logaritmo.

Nesse contexto, o assunto de proporcionalidade pode ser visto em relação à manipulação da escala, aos logaritmos e em relação à PG na formação inicial. Portanto, vários níveis de ensino são tangíveis ao se considerar a manipulação da escala dos números, considerando a proporção contínua, a julgar que o assunto de razão e de proporção é posto como conteúdo do Ensino Fundamental – Anos Finais e logaritmo e PG são vistos no Ensino Médio.

Conhecimentos que estão relacionados, ao se manipular a escala dos números, são vistos de maneira separada, sem nenhum tipo de conexão entre o processo de construção do conhecimento matemático ao se referir a esses conteúdos, algo que pode ser evidenciado por intermédio dessa escala.

4.4 A manipulação da escala dos números para obter média proporcional e suas potencialidades para o ensino de Matemática

O segundo uso da escala dos números, que Gunter (1623) apresenta, está relacionado a encontrar a média proporcional de dois números dados, essa manipulação incorpora conhecimentos advindos da proporção contínua, mas mobiliza outros saberes, inclusive, o entrelaçamento de questões geométricas e aritméticas.

Nesse viés, a ação para encontrar a média proporcional de dois números mobiliza diversos conhecimentos, assim, o processo que os faz emergir pode ser potencialmente didático para o ensino de vários assuntos, como construções geométricas e média geométrica.

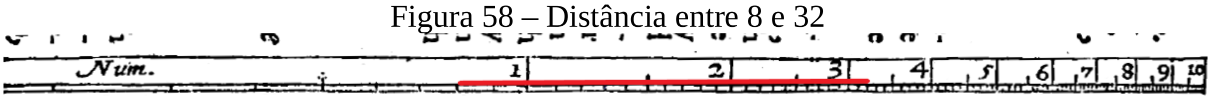
4.4.1 Noções geométricas

Na manipulação da escala dos números para obter a média proporcional entre dois números dados, Gunter (1623, p. 19, tradução nossa) explica: “divida o espaço entre os números extremos em duas partes iguais, e o pé do compasso permanecerá na proporcional média”. O autor oculta como realizar o procedimento de divisão de um espaço em duas partes iguais.

O processo requer a mobilização de conhecimentos geométricos para encontrar um número na escala, desse modo, há uma relação geométrica e aritmética nesse processo, que pode ser explorada. O procedimento geométrico requerido não está explícito, mas as noções acerca das construções geométricas necessárias estão presentes na Educação Básica e na formação inicial.

O primeiro movimento para encontrar a média proporcional de dois números é encontrar o espaço entre eles, logo, com o auxílio do compasso, é preciso determinar a distância entre os números na escala. Então, dados os números 8 e 32, é necessário registrar a distância entre eles, como posto na Figura 58.

Figura 58 – Distância entre 8 e 32



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

O segmento destacado em vermelho, na Figura 57, corresponde à distância entre 8 e 32. Seguindo as instruções de Gunter (1623), é preciso dividir esse segmento em duas partes iguais. Levando em conta as construções geométricas trazidas nos livros didáticos[84], considerando o segmento $\overline{AB}$,

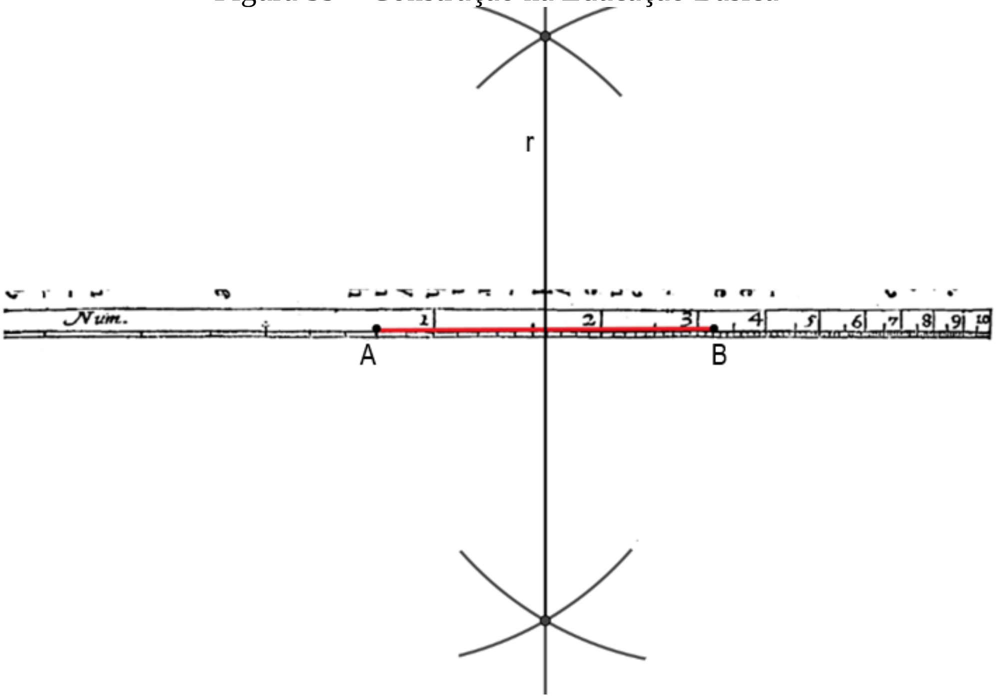
> com a ponta-seca do compasso em A e abertura maior do que metade da medida do comprimento de $\overline{AB}$, traçamos dois arcos [...]. Com essa mesma abertura e com a

[84] Destaca-se que o assunto sobre construções geométricas com régua e compasso não é trazido em todos os livros direcionados ao Ensino Fundamental nos anos finais.

> ponta-seca em B, traçamos outros dois arcos cruzando aqueles traçados anteriormente. Traçamos uma reta r passando pelos pontos de interseção dos arcos (PATARO; BALESTRI, 2018b, p. 212).

Destarte, a reta r é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$. Esse é o procedimento trazido nos livros didáticos para dividir um segmento pela metade, construindo-se a mediatriz desse segmento (Figura 59), uma vez que “o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de dois pontos A e B dados é a mediatriz de $\overline{AB}$” (PATARO; BALESTRI, 2018b, p. 211).

Figura 59 – Construção na Educação Básica



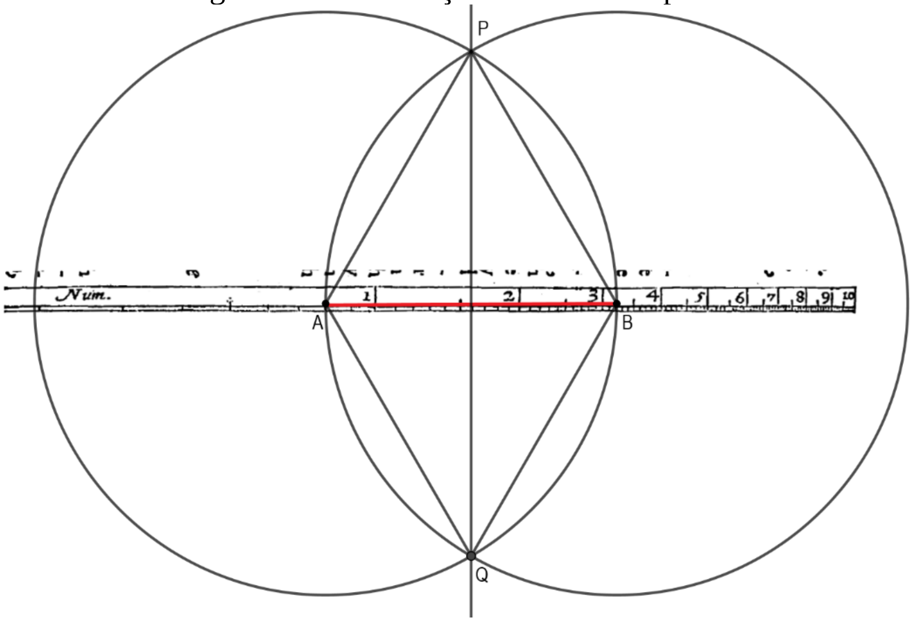
Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Nos livros do Ensino Superior, essa construção está vinculada ao assunto de desenho geométrico, a construção da mediatriz de um segmento é dada de maneira análoga ao exposto na Educação Básica, mas citam mais elementos matemáticos incorporados nessa construção. Segundo Wagner (2007, p. 4),

> A mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular a AB que contém o seu ponto médio. Para construir, traçamos dois círculos de mesmo raio, com centros em A e B. Sejam P e Q os pontos de interseção desses círculos [...]. A reta PQ é a mediatriz de AB porque sendo APBQ um losango, suas diagonais são perpendiculares e cortam-se ao meio. [...] A mediatriz de um segmento é o conjunto de todos os pontos que equidistam dos extremos do segmento.

Logo, nessa construção (Figura 60), há vários elementos geométricos embutidos no processo de traçar uma mediatriz, como perpendicularidade, ponto médio, losango e suas diagonais, desse modo, pode-se explorá-los ao manipular a escala. Percebe-se que Gunter (1623) se refere ao procedimento de dividir um espaço em duas partes iguais, em linguagem moderna, significa encontrar a mediatriz do segmento equivalente à distância na escala entre os dois números dados.

Figura 60 – Construção no Ensino Superior



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Questões acerca do motivo dessa construção resultar na mediatriz do segmento podem ser levantadas, pode-se justificar isso considerando o conhecimento utilizado no período em que Gunter elaborou a escala, utilizando *Os Elementos*, de Euclides. Partindo-se, assim, da ideia de triângulo equilátero e da divisão de um ângulo desse triângulo em duas partes iguais, que vai recair no ponto médio do lado oposto a esse ângulo dividido.

Dessa maneira, mais artifícios geométricos são usados para chegar ao mesmo fim, a mediatriz de um segmento. Então, várias noções geométricas são mobilizadas em apenas dividir um segmento em duas partes iguais, sem levar em conta as implicações dessa ação na escala dos números, emergindo, se feito, outros saberes matemáticos.

No processo de usar compasso e régua não milimetrada para traçar a mediatriz de um segmento, movimentam-se algumas habilidades e competências da BNCC. No Ensino Fundamental – Anos Finais, ao se tratar da construção da mediatriz de um segmento, mobiliza-se a habilidade de "utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados" (BRASIL, 2018, p. 261), que remete à apropriação de régua e compasso para traçar uma mediatriz.

À vista disso, desenvolve-se a competência (EF08MA17), de "Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas" (BRASIL, 2018, p.

311). Além da competência (EF06MA22), de “Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros” (BRASIL, 2018, p. 299).

Destarte, apenas partindo do processo de divisão do segmento correspondente à distância entre os números dados, vê-se que é potencialmente didático ao mobilizar diversos conhecimentos geométricos, que podem ser abordados na formação de professores, em primeira vista, de diversas maneiras, possibilitando a inserção, em sala de aula, de construções geométricas e, assim, acarretando na mobilização de saberes que antes seriam vistos separadamente e em séries de ensino distintas.

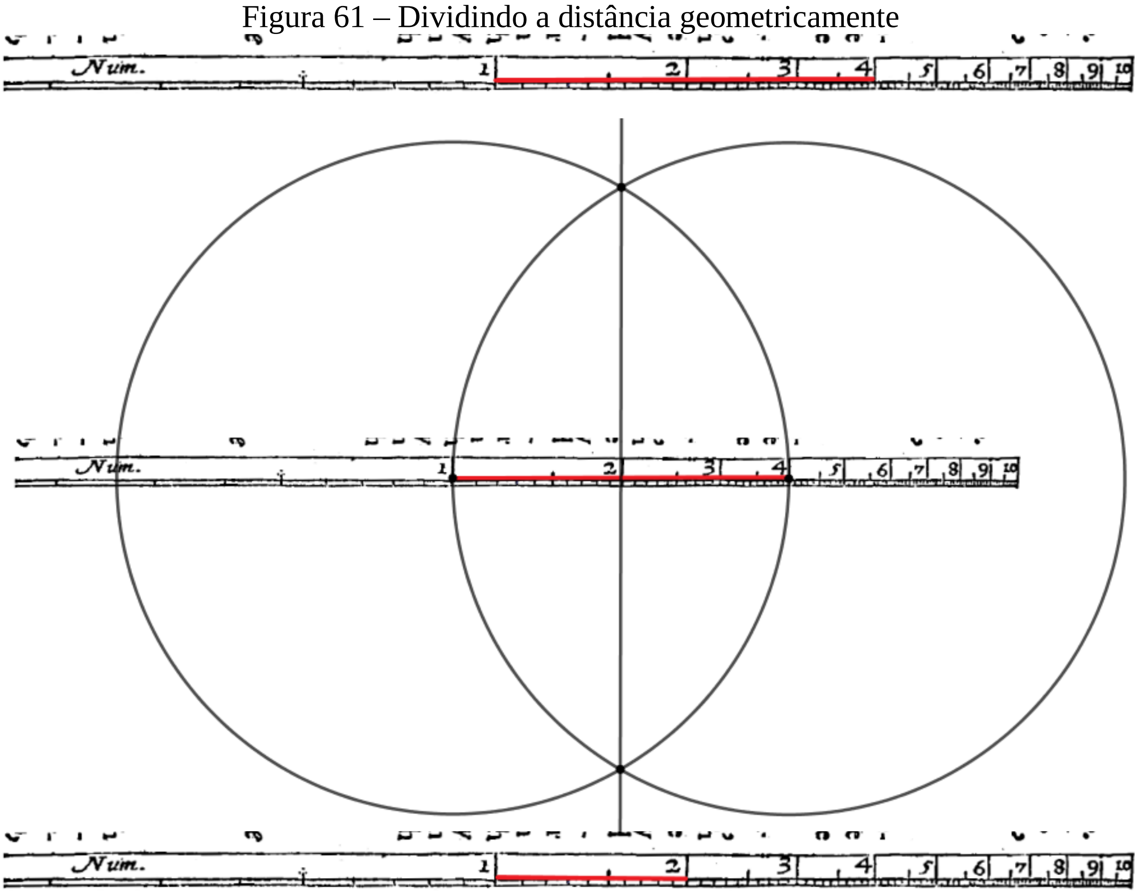
4.4.2 Estudo sobre média geométrica

No processo de encontrar a média proporcional dividindo um segmento em duas partes iguais, além de emergirem conhecimentos geométricos ao se realizar esse procedimento, ao relacionar a divisão do segmento referente à distância dos números dados na escala, outros saberes são desvelados.

Dessa forma, dados os números 8 e 32, para encontrar a média proporcional entre eles, é preciso dividir a distância desses números em duas partes iguais (vide Figura 45), obtendo-se, na escala, a indicação da marcação correspondente ao número 16. Percebe-se que esses números estão em uma proporção contínua, visto que a distância entre 8 e 16 é a mesma de 16 a 32, o que resgata a afirmação de Gunter (1623) sobre a relação da média proporcional e da proporção contínua.

Retomando a ideia de distância entre dois pontos, foi obtido o logaritmo de 4 correspondente à distância entre 8 e 32, ao dividir esse segmento pela metade, ou seja, geometricamente, acha-se o ponto médio/mediatriz do segmento e, aritmeticamente, extrai-se a raiz quadrada da distância equivalente. Considerando o segmento correspondente ao logaritmo de 4, geometricamente, tem-se o observado na Figura 61.

Figura 61 – Dividindo a distância geometricamente



Fonte: Adaptado de Gunter (1623, p. 31).

Assim, adicionando à marcação 8 o logaritmo de 2, encontra-se a média proporcional 16 e a mesma distância, a partir da marcação 16, encontra-se 32 na escala. Nessa forma geométrica de encontrar a metade da distância entre 8 e 32, há um processo aritmético que também pode ser abordado. Dessa maneira, aritmeticamente, tem-se que

$$\log\sqrt{4} = \log 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\log 4) = \log 2$$

Logo, o procedimento aritmético remete a outro conhecimento para obter a média proporcional, de modo direto, da seguinte maneira

$$\log\sqrt{8 \cdot 32} = \log\,(8 \cdot 32)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\,\log 256) = \log 16$$

Mobiliza-se, portanto, o conhecimento sobre média geométrica, uma vez "[...] que a média geométrica corresponde à raiz n-ésima do produto desses n números" (IEZZI; HAZZAN, 2013b, p. 164). Por isso, dados dois números, a média geométrica equivale à raiz quadrada do produto desses números.

Desse modo, é possível aliar geometria e aritmética e estimular a habilidade de

> Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras

> áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções (BRASIL, 2018, p. 263).

O assunto de média geométrica, especificamente, não é visto na Educação Básica, mas os conhecimentos mobilizados por esse conteúdo, como radiciação e multiplicação, podem ser abordados e mobilizar a habilidade (EF08MA02), de "resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário" (BRASIL, 2018, p. 309), além da associação desses conteúdos aos logaritmos e suas propriedades.

Também podem ser vistas aplicações dessa ideia de média geométrica ao comparar lados de quadriláteros com áreas semelhantes, exemplo que Gunter (1623) traz em seu tratado e que mobiliza a manipulação da escala para obter uma média proporcional, podendo alcançar a habilidade (EM13MAT307), de

> Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais (BRASIL, 2018, p. 528).

Já na formação de licenciandos em Matemática, o assunto de média geométrica é visto de maneira superficial, atrelada na grande área de estatística. Assim, a escala dos números possibilita que o professor tenha opções e autonomia para implementar esse assunto desvinculado do conteúdo sobre estatística, priorizando pela geometria ou pela aritmética, a partir da manipulação da escala para encontrar a média proporcional de dois números.

As potencialidades, que emergem da escala dos números, podem ou não serem visualizadas na atividade a ser elaborada no processo de construção da interface. O foco está na pesquisa, na natureza do conhecimento matemático, por isso, a atividade deve englobar esses elementos por meio de uma metodologia e de uma intencionalidade, aspectos que serão vistos no próximo capítulo.

5 A TEORIA DA OBJETIVAÇÃO E O DESENHO DA ATIVIDADE

O caminho traçado por uma pesquisa, geralmente, não é percorrido de forma linear, nem tão pouco ela é escrita da mesma maneira que é realizada. A escolha de seguir os preceitos da interface entre história e ensino de Matemática, proposta por Saito e Dias (2013), direcionou-nos ao estudo das três esferas no tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe and other instruments...*, descrito nas seções anteriores e, consequentemente, à busca por potencialidades didáticas envolvendo o uso da escala os números. Esse trajeto escolhido perpassou, até agora, por uma metodologia qualitativa de cunho documental. Entretanto, ao chegar à fase da interface, na qual se produz, aplica e analisa as atividades, isso ainda não foi definido.

Dessa forma, considerou-se a Teoria da Objetivação para fornecer os aportes necessários para as lacunas metodológicas da interface. Logo, este capítulo traz o delineamento da Teoria da Objetivação, os elementos de construção e o desenho da atividade. Também apresenta as tarefas da atividade elaborada, o contexto de aplicação no que se refere aos sujeitos, ao *lócus* e aos elementos participantes na aplicação.

5.1 A Teoria da Objetivação como metodologia da interface

A Teoria da Objetivação faz parte de um apanhado de teorias educacionais socioculturais modernas, de maneira objetiva:

> A Teoria da Objetivação (TO) é uma teoria educacional que se concentra nos problemas do ensino e da aprendizagem e para isso se baseia na filosofia de Hegel (1830[1991]) e no subsequente materialismo dialético desenvolvido por filósofos como Marx (1932[1998]) e Ilyenkov (1977). O suporte filosófico dialético da teoria da objetivação significa, entre outras coisas, que a TO está inserida em uma linha de pensamento na qual os seres humanos não podem ser concebidos como apartados do mundo e de suas culturas (RADFORD, 2018a, p. 229-230).

Os fundamentos teóricos da TO se baseiam em pensadores como Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831), Karl Marx (1818-1883), Evald Ilienkov (1924-1979) e Lev Vygotsky (1896-1934)[85], em que são consideradas ideias desses estudiosos, que moldam a Teoria da Objetivação.

[85] Sobre os estudos filosóficos que sustentam a TO, vide: Moretti, Panossian e Radford (2018) e Radford (2021).

Em outras palavras, a TO “[...] é baseada na ideia fundamental que aprender é conhecer e se tornar” (RADFORD, 2017, p. 97, tradução nossa)[86]. Desse modo, ela foca nos problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem e leva em consideração a cultura e o seu meio social no processo de aprendizagem e de tomada de consciência de um determinado saber.

Assim, partir da ideia de objeto definida por Hegel, que, segundo Radford (2018b), é definido como algo em que se toma consciência, tem-se a definição de objetivação dessa teoria, a qual se estabelece por “[...] processos sociais por meio dos quais os alunos se encontram diante de formas de pensamento e ação constituídas histórica e culturalmente e, gradativamente, se familiarizam com elas, de forma crítica” (RADFORD, 2018b, p. 67, tradução nossa)[87].

O processo de objetivação ocorre de maneira gradual, com interações sociais e culturais entre os alunos e o professor, através do labor conjunto e da cooperação entre discentes e docente, então, o saber emerge de forma sensorial por meio de ações e discussões.

Nesse processo de objetivação, além de se levar em conta aspectos socioculturais, essa teoria se atenta tanto no aluno como no professor, “a TO concebe os professores e os estudantes como seres humanos em fluxo, como projetos inacabados, em busca de si mesmos, empenhados num mesmo esforço onde sofrem, lutam e encontram satisfação juntos” (RADFORD, 2018a, p. 242). Destarte, a relação entre estudantes e professor se faz por meio do trabalho em conjunto, elemento bastante valorizado nessa teoria.

É, nesse cenário, que o processo de objetivação acontece e, concomitantemente, ocorre o desenvolvimento da subjetivação, que se entende como os “[...] processos pelos quais os alunos encontram outras vozes e perspectivas e se tornam sujeitos culturais históricos únicos. A subjetivação é o processo histórico de criação do ser” (RADFORD, 2018b, p. 69, tradução nossa)[88]. É, na subjetividade, que há posicionamento individual quanto ao acontecimento em que professor e alunos estão envolvidos (RADFORD, 2020a).

Por isso, há dois modos de compreender a aprendizagem em vista da TO, considerando o saber, em que se revelam os processos de objetivação e o devir/tornar-se, em que emergem os processos de subjetivação, para isso, é preciso entender como se compreende o saber na perspectiva da TO.

---

[86] Lê-se no original: “[...] se basa en la idea fundamental de que el aprendizaje es tanto conocer como devenir” (RADFORD, 2017, p. 97).
[87] Lê-se no original: “[...] procesos sociales a través de los cuales los estudiantes se encuentran frente a formas de pensamiento y acción histórica y culturalmente constituídas y se familiarizan gradualmente con ellas, de una manera crítica” (RADFORD, 2018b, p. 67).
[88] Lê-se em espanhol: “procesos mediante los cuales los estudiantes encuentran otras voces y perspectivas y llegan a ser sujetos culturales históricos únicos. La subjetivación es el proceso histórico de creación del yo” (RADFORD, 2018b, p. 69).

O saber se configura como "[...] um sistema histórico e culturalmente constituído de processos de ação e reflexão corpóreos, sensíveis e materiais. Saber, conforme definido aqui, muda de cultura para cultura e ao longo do tempo. Ocorre na atividade humana e é mais do que uma tecnologia para fazer algo" (RADFORD, 2018c, p. 3, tradução nossa)[89]. Em outros termos, o saber é uma potencialidade, uma capacidade do indivíduo de fazer ou pensar, ele não está instituído, é uma unidade histórico-cultural (RADFORD, 2020b).

O conhecimento, por outro lado, é a atualização do saber, que ocorre por meio da atividade, especificamente, "o *conhecimento* é o conteúdo conceitual concreto por meio do qual o saber é corporificado, ou materializado, ou atualizado. Entretanto, seu conteúdo conceitual e concreto aparece e só pode aparecer através da atividade humana" (RADFORD, 2021, p. 51, tradução nossa)[90].

Já que essa teoria tem esses pressupostos, ela deve fornecer uma metodologia para o delineamento da atividade e da sequência didática a ser considerada como um elemento de análise, é a partir dela que vão se moldar os processos de objetivação e de subjetivação, além da interação entre alunos e professor em trabalho em conjunto. Radford (2020a, p. 28, tradução nossa)[91] acrescenta que "a metodologia, portanto, inclui um processo de design de aula, bem como um processo de *produção* de eventos e sua *interpretação* teórica".

É na atividade que

> [...] os indivíduos ativam e põem em movimento o saber, tornando concretas certas formas de ação e reflexão. Quando ativado, o saber se transforma. Ao transforma-se, abandona a sua forma imperceptível e se *mostra*, se *materializa* em algo perceptível, sensível, concreto. Essa *materialização* é identificada na TO sob o termo *conhecimento* (MOREY, 2020, p. 56-57).

Portanto, para que o saber se torne concreto, é preciso que ele seja mobilizado na atividade por meio do trabalho em conjunto, desse modo, a partir dos processos de objetivação, o saber objetivado torna-se conhecimento, é na atividade que o indivíduo toma consciência dele.

---

[89] Lê-se em espanhol: "[...] un sistema histórico y culturalmente constituido de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y reflexión. El saber, tal como se define aquí, cambia de cultura en cultura y con el paso del tiempo. Se produce en la actividad humana y es más que una tecnología para hacer algo" (RADFORD, 2018c, p. 3).

[90] Lê-se no original: "*Knowing* is the concrete conceptual content through which knowledge is embodied, or materialised, or actualised. However, its conceptual, concrete content appears and can appear only through human activity" (RADFORD, 2021, p. 51).

[91] Lê-se no original: "La metodología incluye, pues, un proceso de diseño de lecciones, así como un proceso de *producción de eventos* y su *interpretación* teórica" (RADFORD, 2020a, p. 28).

É nesse aspecto que a Teoria da Objetivação vai fornecer subsídios para a interface entre história e ensino de Matemática, será por meio dela que a atividade será desenhada para ser aplicada, no caso desta pesquisa, com licenciandos em Matemática. Logo, no próximo capítulo, serão apresentados os aspectos incorporados na construção da atividade com base na TO.

5.2 A atividade segundo a TO

A atividade, levando em conta os pressupostos da TO, tem relação com o exercício humano, é nesse meio que os alunos encontram os saberes culturais. Ela é construída de tal forma, que o trabalho em conjunto seja valorizado, elemento crucial ao se considerar a ideia de atividade nessa perspectiva (RADFORD, 2018c, 2020b).

A Teoria da Objetivação considera a atividade no sentido da palavra alemã *Tätigkeit* e da palavra russa *deyatel'nost'*, as quais se referem à atividade como esforço humano coletivo, que reflete em ações que transcendem o simples fazer algo, ela é um sistema dinâmico que busca a satisfação das necessidades humanas (RADFORD, 2015, 2018c, 2020b, 2021).

Nesse sentido, tem-se o ente primordial da TO, o labor conjunto, que se entende como a cooperação entre professor e alunos, com papéis diferentes, em que o professor deve se atentar à seleção de problemas da atividade e da organização dos assuntos a serem abordados. Nesse aspecto, a aprendizagem está voltada para perceber e dar significado ao saber (potencial), de maneira ativa e criativa, por meio de ações e reflexões (RADFORD, 2015, 2021; PAIVA, 2019).

Desse modo, é preciso elaborar as tarefas da atividade, que se caracterizam como as ações moldadas para que sejam vivenciadas em sala de aula, mobilizando, a partir do labor conjunto, saberes que, à medida da sua materialização, os alunos tomarão consciência. Assim, na formulação das tarefas da atividade, é preciso ter em vista três elementos, as considerações gerais, as relativas aos problemas e as relacionadas à colaboração:

> (1) As considerações gerais incluem:
> a. levando em conta o que os estudantes já sabem; e
> b. envolvendo, na medida do possível, o uso de artefatos (concretos, tecnológicos, etc.).
> (2) As considerações relativas aos problemas matemáticos indicam que eles devem:
> c. ser interessantes do ponto de vista dos alunos;
> d. oferecer aos alunos oportunidades de se envolverem com saberes matemáticos em níveis profundos de conceituação;
> e. ser organizados de acordo com uma unidade conceitual e contextual; e
> f. ter uma complexidade conceitual crescente.
> (3) As considerações sobre as formas especificas de colaboração humana incluem a organização da sala de aula de uma forma que venha:

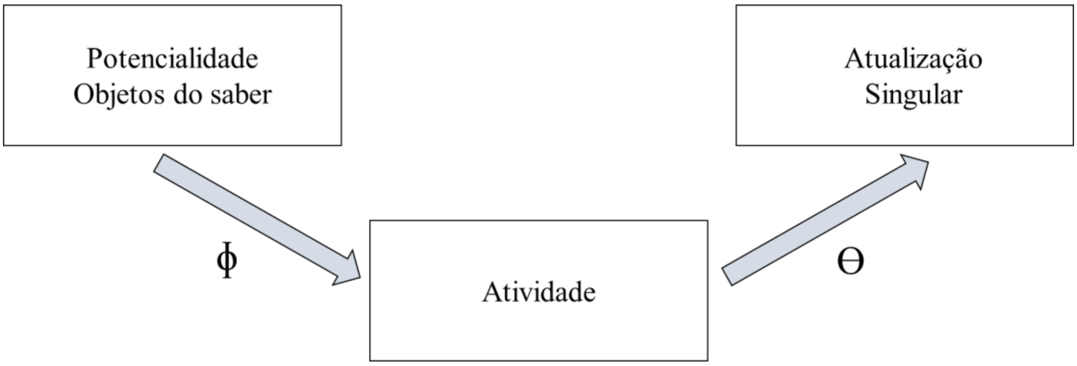
> g. incentivar reflexões críticas; e
> h. propiciar uma forte interação entre os alunos, e entre o professor e os alunos (RADFORD, 2021, p. 133, tradução nossa)[92].

Em resumo, é preciso que os problemas das tarefas levem em consideração o que os alunos já têm consciência, sejam encadeados em ordem de dificuldade, partindo do mais simples ao mais elaborado em questão de complexidade e que façam uso, preferencialmente, de algum recurso material.

Outros elementos devem estar presentes na estruturação das tarefas, como o objeto e o objetivo. O objeto se configura como um ente histórico-cultural, cujo saber se revela à consciência no processo da atividade. Já o objetivo é traçado com foco em alcançar o objeto da atividade.

Dados esses pressupostos, Radford (2015) apresenta (Figura 62) que a seta ϕ corresponde à intenção pedagógica, ou seja, às possibilidades traçadas previamente pelo professor ou pesquisador em relação à aplicação da atividade. A seta Θ diz respeito ao que realmente acontece no decorrer da atividade.

Figura 62 – Componentes ϕ e Θ da TO



Fonte: Adaptado de Radford (2015, p. 555).

[92] Lê-se em inglês: "1. General considerations include:
a. taking into account what the students already know; and
b. involving, as far as possible, the use of (concrete, technological, etc.) artefacts.
2. Considerations concerning the mathematical problems include problems that:
c. are interesting from the students' point of view;
d. offer the students opportunities to engage with mathematical knowledge at deep levels of conceptualisation;
e. are organised according to a conceptual and contextual unity (more on this below); and
f. have an increasing conceptual complexity (more on this below).
3. Considerations about the targeted forms of human collaboration include the organisation of the classroom in ways that:
g. encourage critical reflections; and
h. propitiate a strong interaction between the students, and between the teacher and the students" (RADFORD, 2021, p. 133).

Isso posto, os alunos são divididos, de preferência, em pequenos grupos para promover o trabalho em conjunto, o esforço dos componentes dos grupos e do professor é chamado, na TO, de ética comunitária, que "[...] está centrada em três elementos: a) responsabilidade, b) compromisso, e c) o cuidado com os outros" (RADFORD, 2021, p. 224, tradução nossa)[93]. A ética comunitária rege o comportamento entre os indivíduos participantes da atividade.

No que se refere às tarefas da atividade, elas precisam estar em consonância com o saber histórico-cultural, dessa maneira, elas precisam ter três níveis de conceituação:

> – O primeiro nível e associado a uma experiência sensorial concreta, isto é, a uma experimentação e reflexão através do uso de materiais concretos [...].
> – O segundo nível de conceitualização envolve uma reflexão teórica baseada no uso de objetos concretos que poderiam realçar possíveis ligações emergentes que dão significado aos objetos matemáticos.
> – O terceiro nível de conceitualização aparece com a manipulação de símbolos matemáticos com os quais os estudantes elevam a experiência anterior (experiência sensorial, concreta) para outro nível de consciência (RADFORD, 2021, p. 133-134, tradução nossa)[94].

Os níveis de conceitualização não estão regidos por uma ordem específica, não é pré-definido que a tarefa seja estruturada respeitando uma sequência entre os níveis, eles podem se sobrepor ou acontecer de maneira concomitante com outro nível. Retomando, assim, a ideia de que os problemas precisam estar organizados em uma complexidade conceitual crescente, mas que nada impede o aluno de retomar conceitos mais elaborados do saber matemático em mobilização.

O que é de extrema importância, na tarefa, é que os problemas estejam inter-relacionados. Conforme Radford (2021), é interessante que se adote uma unidade conceitual e contextual em relação aos problemas, essa unidade vai conduzir o plano de fundo da atividade, com contexto e os aspectos matemáticos conceituais dos problemas.

Dados esses preceitos em vista da TO, será apresentada, na próxima sessão, a atividade elaborada para esta pesquisa e suas tarefas, seguindo as indicações postas anteriormente, bem como os pressupostos da interface, haja vista que se considerou a escala dos números e os saberes incorporados nela.

---

[93] Lê-se no original: "[...] is centred on three elements: a) responsibility, b) commitment, and c) the care for others" (RADFORD, 2021, p. 224).

[94] Lê-se no original: "– A first level is associated with a concrete sensual experience; that is, with an experimentation and reflection through the use of concrete materials […].
– A second level of conceptualisation involves a theoretical reflection based on the use of concrete objects that could open up possible emerging links to the meaning of mathematical objects.
– A third level of conceptualisation appears with the manipulation of mathematical symbols with which the students raise the previous experience (e.g., concrete, sensual experience) to another level of consciousness" (RADFORD, 2021, p. 133-134).

5.3 Atividade elaborada envolvendo a escala dos números a partir da TO

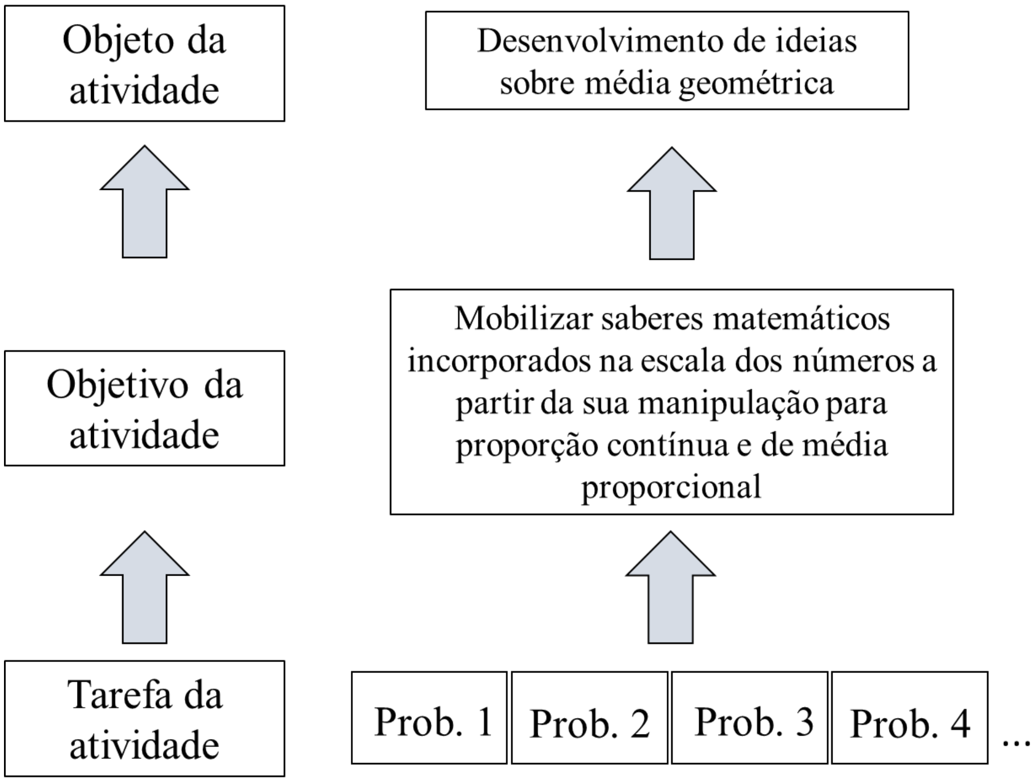
Considerando o intuito desta pesquisa, de mobilizar conhecimentos matemáticos utilizando a escala dos números, desenvolvida por Edmund Gunter, na formação de professores, tendo por base a interface entre história e ensino e a TO, elaborou-se uma atividade que pode ser aplicada tanto com licenciandos em Matemática quanto com professores em exercício na formação continuada.

Seguindo os pressupostos da TO, a atividade foi pensada de forma a ser aplicada com discentes do curso de licenciatura em Matemática, a fim de que pudessem se ambientar no contexto em que a escala foi elaborada, conhecessem os conhecimentos incorporados na escala e na sua manipulação para o uso de proporção contínua e média proporcional.

A atividade proposta perante a Teoria da Objetivação ainda está tomando espaço nas pesquisas nacionais, o que foi constatado mediante buscas na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, no dia 13 de outubro de 2021, de pesquisas que versam sobre a TO e a formação de professores, percebeu-se que não há pesquisas voltadas para uma abordagem considerando a Teoria da Objetivação na formação inicial de professores de Matemática.

À vista disso, planejou-se uma atividade no contexto da formação dos futuros professores de Matemática, tal como mostra a Figura 63, que teve como objeto o desenvolvimento de ideias sobre média geométrica e o objetivo foi voltado para a mobilização de saberes matemáticos incorporados na escala dos números a partir da sua manipulação para proporção contínua e de média proporcional, pois é preciso entender a Matemática envolvida nesses elementos para que se possa pensar sobre a média geométrica de outra forma, agregando significado a ela.

Figura 63 – Estrutura da atividade



Fonte: Adaptado de Radford (2021, p. 137).

Já a unidade conceitual e contextual dessa atividade corresponde ao contexto de elaboração do tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and others instruments*..., datado de 1623, que traz a escala dos números, visto que a atividade foi pautada na sua manipulação.

Com essa estrutura montada, foram elaboradas sete tarefas para essa atividade, as quais estavam inter-relacionadas, respeitavam uma disposição crescente de dificuldade dos problemas e das ações[95] que foram propostas, tinham objetivos e intencionalidades particulares, mas que culminavam no objetivo e no objeto da atividade.

5.3.1 Tarefa 1 – Desvelando Londres no século XVII a partir do tratado The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments…

A primeira tarefa foi desenvolvida com a intencionalidade de ambientar os alunos no contexto de Londres no começo do século XVII, período no qual o tratado de Edmund Gunter, utilizado para este estudo, foi elaborado e no qual a escala dos números está inserida. Com isso,

[95] Por ações, entendem-se ações-chave de um problema que requer, por exemplo, compreender, comparar ou preencher um quadro (RADFORD, 2021).

a tarefa substituirá, na formação, uma aula expositiva sobre os acontecimentos dessa época e sobre as matemáticas que estavam em transição nesse período. Observa-se, no Quadro 4, a estrutura dessa tarefa[96].

Quadro 4 – Estrutura da tarefa 1

OBJETO	Desenvolvimento de ideias sobre média geométrica.	
OBJETIVO	Contextualizar os participantes, licenciandos em Matemática, sobre o período em que o tratado foi elaborado, ou seja, Londres, Inglaterra, século XVII.	
PROBLEMAS	Problema 1: Exploração do cenário histórico no qual o tratado de Gunter (1623) foi desenvolvido, trazendo discussões relacionadas aos aspectos sociais, políticos e econômicos da Inglaterra no século XVII.	
	Problema 2: Reconhecimento de elementos contextuais a partir do texto contido no cartão de recurso 1, que retrata aspectos de elaboração do tratado de Gunter (1623).	

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

Como essa tarefa é de ambientação em relação ao contexto de elaboração do tratado de Gunter (1623), foi montado um cenário para que os estudantes fossem transportados para Londres, no século XVII, com o intuito de que os discentes pudessem desvelar os aspectos sociais, econômicos e políticos da época, com base nas informações disponibilizadas, tentando se distanciar ao máximo de interpretações anacrônicas.

Assim, esse momento é importante para que eles percebam que a Matemática que circulava no período é diferente e tinha outra abordagem da Matemática moderna, podem levar para suas formações uma visão diferente da história, em que é preciso vê-la com os olhos do período e não com os do presente ao mapear os conhecimentos da época.

Logo, para essa tarefa, foi atribuído um cartão de recurso (Apêndice A), com informações acerca do contexto de Londres e acerca do tratado, como o seu frontispício e endereços de oficinas, que foram responsáveis pela construção do instrumento Setor, para os discentes se situarem naquele cenário.

Foi idealizado, para essa tarefa, que os discentes se colocassem em uma situação na qual precisavam encontrar, com as instruções trazidas no cartão de recurso, a oficina de Elias Allen, para obter mais instruções sobre o tratado e o que ele aborda para tentar voltar às suas

[96] Os quadros de estrutura de tarefa desta pesquisa são baseados no estudo de Paiva (2019).

realidades. No decorrer da tarefa, eles precisavam resolver problemas trazidos no cartão tarefa (Apêndice B), nesse caso, sobre o contexto no qual eles foram inseridos.

A partir da leitura em conjunto do cartão de recurso, os alunos seriam direcionados a responderem problemas acerca do meio em que o tratado de Gunter (1623) foi elaborado, com base na análise do frontispício do tratado, em informações do próprio cartão de recurso e de um texto complementar. A segunda tarefa se concentrou no tratado e na escala dos números.

5.3.2 Tarefa 2 – Estudando o conhecimento incorporado na escala dos números

A tarefa dois está relacionada ao estudo do *Cross-staff* e de uma escala inserida nele, especificamente, a escala dos números, que será objeto de manipulação no decorrer da atividade. Para isso, é associado a essa tarefa um excerto do tratado de Gunter (1623) sobre o instrumento *Cross-staff* e sobre a respectiva escala. Assim, a tarefa teve a estrutura montada como se apresenta no Quadro 5.

Quadro 5 – Estrutura da tarefa 2

OBJETO	Desenvolvimento de ideias sobre média geométrica.
OBJETIVO	Conhecer a escala dos números.
PROBLEMAS	Problema 1: Reconhecimento do instrumento em que a escala dos números está inserida.
	Problema 2: Discussões iniciais acerca da escala dos números.
	Problema 3: Discussões sobre a Matemática incorporada nas marcações da escala dos números.
	Problema 4: Discussões sobre a descrição da escala trazida no tratado.

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

Essa tarefa conta com um cartão de recurso (Apêndice C) a respeito das informações acerca do instrumento *Cross-staff* e da escala dos números, retiradas do tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments*... e um cartão tarefa (Apêndice D) com problemas relacionados aos elementos citados anteriormente, em que seria requerida dos licenciandos uma leitura e um estudo do instrumento e da escala, bem como dos conhecimentos matemáticos incorporados nela.

Para esse momento, a intenção dessa tarefa está voltada para a familiarização dos discentes quanto à escala dos números e aos conhecimentos que estão envoltos nela, dessa maneira, algumas hipóteses foram levantadas previamente acerca dos saberes que poderiam ser mobilizados a partir desse estudo, como o conhecimento sobre logaritmo, visto como elemento primordial e chave da escala dos números, algo que é mais desenvolvido no capítulo anterior.

A partir disso, os licenciandos se apropriariam do conhecimento de logaritmo para iniciar a manipulação da escala, haja vista que já estariam familiarizados com o contexto em que ela estava inserida e o conhecimento principal incorporado nela.

5.3.3 Tarefa 3 – Estudando a proporção contínua com a escala dos números

A partir da tarefa 3, são abordadas manipulações da escala dos números, relacionadas a encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua e para obter a média proporcional dados dois números, manuseios explorados contextualmente no capítulo três. Essa tarefa (Quadro 6), especificamente, trata sobre os princípios para o manuseio da proporção contínua por meio da escala desenvolvida por Gunter (1623).

Quadro 6 – Estrutura da tarefa 3

OBJETO	Desenvolvimento de ideias sobre média geométrica.
OBJETIVO	Entender a manipulação da escala dos números para o uso de proporção contínua.
PROBLEMAS	Problema 1: Compreensão do uso da escala dos números para manipulação de proporção contínua a partir das orientações de Gunter (1623).
	Problema 2: Estudo dos termos matemáticos encontrados no excerto relacionado à manipulação da escala para proporção contínua.
	Problema 3: Proporcionar uma discussão sobre a transformação de ordem dos números para a manipulação da escala (multiplicação e divisão por 10).
	Problema 4: Promover as primeiras considerações sobre os conhecimentos mobilizados na manipulação da escala para a proporção contínua

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

Essa tarefa tem como intencionalidade o estudo do manuseio da escala dos números e a aproximação com o conhecimento logarítmico incorporado nela, para que o futuro professor possa formular ideias que agreguem ao ensino de Matemática, seja por meio de associação de ideias logarítmicas com proporção, de logaritmos com progressão geométrica ou por meio de uma nova organização de assuntos, como visto no capítulo quatro.

Foi atribuído à tarefa 3, desse modo, um cartão de recurso (Apêndice E), contendo o excerto do tratado, com o devido tratamento didático, sobre os passos expressos por Gunter (1623) do uso da escala dos números para obter um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua.

Assim, o cartão tarefa (Apêndice F) traz quatro problemas relacionados à proporção contínua. Nesse momento, os discentes precisam ter em mãos a escala dos números e um compasso para a manipulação, a fim de que eles possam se debruçar na ação de manipular a escala seguindo as instruções de Gunter (1623). A tarefa seguinte está relacionada a um cenário em que os discentes vão utilizar os saberes movimentados na tarefa 3.

5.3.4 Tarefa 4 – Cenário contextualizado sobre a proporção contínua

Nessa tarefa (Quadro 7), foi idealizado um cenário que envolve o contexto de Londres, no século XVII, no que diz respeito às matemáticas, no qual se estavam produzindo uma quantidade considerável de instrumentos e as oficinais de artesãos tinham destaque. Logo, os discentes podem mobilizar os saberes vistos nas tarefas anteriores para resolver os problemas propostos.

Quadro 7 – Estrutura da tarefa 4

OBJETO	Desenvolvimento de ideias sobre média geométrica.
OBJETIVO	Refletir sobre o conceito de sequência numérica, em particular, sobre progressão geométrica (PG).
PROBLEMAS	Problema 1: Reflexão em grupo sobre a manipulação da escala em um problema contextualizado.
	Problema 2: Estimular os alunos a mobilizarem os saberes sobre transformação de um número para o início da escala de maneira crescente (Multiplicação por 10) (PG crescente).
	Problema 3: Estimular os discentes a mobilizarem saberes para manipular a escala de forma decrescente (PG decrescente).

	Problema 4: Sistematização das ideias em linguagem matemática a partir da manipulação da escala para proporção contínua em problemas contextualizados.

Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Nessa tarefa, as discussões serão em torno da quantidade de instrumentos fabricados em Londres a partir do século XVII, por meio do cartão tarefa 4 (Apêndice G), que, no contexto criado, a fabricação dos instrumentos obedece a uma proporção contínua, então, é proposto que os discentes manipulem a escala dos números, a fim de resolverem a situação posta.

Nesse momento, foram levantadas algumas hipóteses sobre os saberes que seriam mobilizados pelos discentes, como o de logaritmo e o de PG, como consta no capítulo anterior, visto que essa tarefa é composta por um nível de complexidade maior. Assim, a intenção, para o final dessa tarefa, é que cada um dos grupos pudesse sistematizar, por meio de uma fórmula matemática, a manipulação da escala dos números para o manuseio da proporção contínua.

5.3.5 Tarefa 5 – Estudando a média proporcional com a escala dos números

Após a tarefa direcionada para os discentes manusearem a escala dos números para encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua e formalizarem matematicamente essa manipulação, adentra-se no manuseio da escala dos números para encontrar a média proporcional de dois números a partir da tarefa 5 (Quadro 8).

Quadro 8 – Estrutura da tarefa 5

OBJETO	Desenvolvimento de ideias sobre média geométrica.
OBJETIVO	Compreender a manipulação da escala dos números para encontrar a média proporcional.
PROBLEMAS	Problema 1: Compreensão sobre o manuseio da escala dos números para obter média proporcional.
	Problema 2: Entendimento acerca da relação do segmento representado pelo espaço dos números dados com o manuseio para encontrar a média proporcional entre esses números.
	Problema 3: Entendimento sobre a relação entre a proporção contínua (PG) e a média proporcional (MG).

	Problema 4: Reconhecimento dos conhecimentos que são mobilizados na manipulação da escala dos números para obter a média proporcional de dois números dados.

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

Nessa tarefa, além de mobilizar os saberes relacionados à proporção contínua, uma vez que a média proporcional está diretamente associada a ela, nessa manipulação, outros aspetos matemáticos emergem, como elementos geométricos e aritméticos, também abordados no capítulo quatro deste estudo. É nesse momento que os discentes podem se familiarizar com os procedimentos trazidos por Gunter (1623), expostos no cartão de recurso 5 (Apêndice H), sobre a média proporcional.

A intencionalidade dessa tarefa está voltada para o estudo inicial da manipulação da escala dos números para obter a média proporcional de dois números, nesse processo, várias discussões acerca da Matemática envolvida podem surgir, o que faz com que os licenciandos revisitem saberes matemáticos antes não mobilizados.

Portanto, será direcionado, por meio do cartão tarefa 5 (Apêndice I), o estudo dos detalhes dessa manipulação e o reconhecimento, ao final da tarefa, dos saberes matemáticos que emergiram no decorrer desse estudo, para só então haver um aprofundamento com os problemas de maior nível de complexidade, envolvendo a ideia de um problema disposto no tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments*..., que aborda questões interessantes sobre a relação entre geometria e aritmética.

É a partir dessa tarefa que a ideia acerca de média geométrica (objeto da atividade) pode emergir com as primeiras impressões sobre a média proporcional e o procedimento matemático mobilizado através da escala para esse fim. Logo, a análise dos dados partirá desse momento da atividade.

5.3.6 Tarefa 6 – A geometria aliada à aritmética por meio da escala dos números

Essa tarefa foi elaborada a partir de um problema trazido por Gunter (1623, p. 35, tradução nossa)[97], que envolve a média proporcional e a manipulação da escala dos números, segue o problema: "7. Tendo o comprimento e a extensão de uma superfície oblonga, encontrar

[97] Lê-se no original: "7. Having the length and bredth of an oblong superficies, to find the side of a square equail to the oblong. Divide the space between the length and the bredth into to two equall parts, and the foot of the compasses will stay at the side of the square" (GUNTER, 1623, p. 35).

o lado de um quadrado igual ao oblongo. Divida o espaço entre o comprimento e a largura em duas partes iguais, e o pé do compasso permanecerá no lado do quadrado”.

Partindo desse problema, formulou-se o cartão tarefa 6 (Apêndice J), com o cenário em que os discentes precisariam encontrar os lados de terrenos retangulares e quadrangulares de áreas semelhantes. Desse modo, a tarefa foi formulada (Quadro 9) de tal maneira, que os discentes pudessem mobilizar vários saberes matemáticos já vistos em tarefas anteriores e formular novas ideias.

Quadro 9 – Estrutura da tarefa 6

OBJETO	Desenvolvimento de ideias sobre média geométrica.
OBJETIVO	Refletir sobre sequência numérica e média geométrica.
PROBLEMAS	Problema 1 e 2: Reflexão acerca de área de superfícies semelhantes com procedimento de média proporcional.
	Problema 3: Reflexão sobre a proporção contínua associada à média proporcional a partir do contexto do problema.
	Problema 4: Sistematização das ideias em linguagem matemática a partir da manipulação da escala para obter a média proporcional de dois números.

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

A intenção dessa tarefa está focada na mobilização dos aspectos matemáticos que emergiram no decorrer da atividade, especialmente, os relacionados à média proporcional, haja vista que, nela, concentra-se o maior nível de complexidade e requer que os discentes retomem elementos vistos anteriormente. É nela que se concentram os problemas relacionando geometria, logaritmos e média geométrica.

Nesse momento, os discentes movimentam, de forma mais aparente, a média geométrica e são capazes de a ressignificar a partir de todo o processo de objetivação, que já está em curso nas demais tarefas. Ao finalizar os problemas dessa tarefa, os discentes completam as missões dispostas a eles em Londres do século XVII e estão aptos a identificar os conhecimentos que emergiram no decorrer da atividade.

5.3.7 Tarefa 7 – Sistematização das ideias matemáticas mobilizadas

A última tarefa (Quadro 10) dessa atividade tem a intenção de identificar se os discentes estão conscientes dos saberes matemáticos que eles utilizaram ao manipular a escala dos números para encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua e a média proporcional de dois números.

Quadro 10 – Estrutura da tarefa 7

OBJETO	Desenvolvimento de ideias sobre média geométrica.
OBJETIVO	Formalizar os aspectos matemáticos identificados ao manipular a escala dos números para proporção contínua e para obter a média proporcional.
PROBLEMAS	Problema 1: Formalização dos conhecimentos percebidos pelos licenciandos ao manipularem a escala para obter um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua.
	Problema 2: Formalização dos conhecimentos percebidos pelos participantes ao manipularem a escala para obter a média proporcional de dois números.

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

A partir dos norteamentos do cartão tarefa (Apêndice K) e de livros utilizados no Ensino Superior, como a coleção Matemática Elementar, livros de geometria plana e de desenho geométrico, os discentes serão convidados a responderem a dois problemas relacionados aos elementos matemáticos que eles utilizaram e a identificarem nos livros esses aspectos e a elencarem para o manuseio da proporção contínua e da média proporcional, como visto no capítulo anterior.

Desse modo, tem-se, de maneira formal e objetiva, quais conhecimentos matemáticos os licenciandos se depararam no desenrolar da atividade, para confrontar com as hipóteses que foram levantadas anteriormente à aplicação da atividade e o que cada grupo realmente mobilizou.

5.4 Contexto geral de aplicação da atividade

Depois de elaborar a atividade e as tarefas dela, o próximo passo é a aplicação dessa atividade, é, nela, que se dará a prática dos elementos supracitados em relação à TO. Assim, apresenta-se a seguir a estrutura na qual aplicou-se a atividade, o lócus da pesquisa e os instrumentos de coleta de dados.

5.4.1 A estrutura de aplicação da atividade

A atividade foi planejada para ser aplicada com licenciandos em Matemática, da Universidade Estadual do Ceará – UECE, por meio de uma formação, que foi realizada de maneira remota, por causa da pandemia da Covid-19, em que não foi possível aplicar a atividade presencialmente. Utilizou-se, então, a plataforma *Zoom Meetings*, que possibilita a criação de grupos separados por meio de salas virtuais.

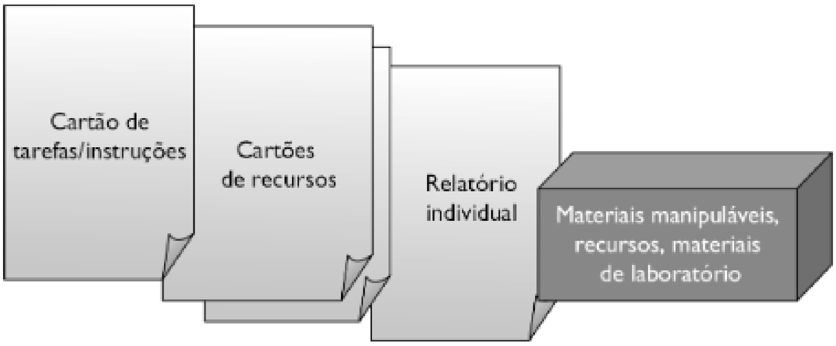
Por essa razão, foram ofertadas oito vagas e todas foram preenchidas. A quantidade oferecida se justifica pela TO e pelo contexto vivenciado no período de aplicação da atividade, a TO sugere que os grupos a serem formados tenham poucos componentes (RADFORD, 2021), como foi realizada de maneira remota, optou-se pela oferta de apenas oito vagas.

Portanto, a formação começou no dia 25 de maio de 2021, por meio de reuniões na plataforma *Zoom Meetings*, com encontros nas terças-feiras e nas quintas-feiras, no horário das 17h às 18h30min. A formação terminou no dia 29 de julho de 2021.

A atividade teve um plano de fundo situado em Londres, no século XVII, principalmente, no cenário descrito no capítulo dois desta pesquisa. Assim, as tarefas estão vinculadas tanto ao contexto de elaboração do tratado como ao reconhecimento da escala dos números e das manipulações para encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua e para obter a média proporcional de dois números, perpassando, então, por todos os pontos destacados anteriormente neste estudo.

Logo, foram desenvolvidos vários instrumentais para cada momento na atividade, atrelados às tarefas, como os cartões de recurso e os cartões tarefa, abordados, especificamente, nos tópicos anteriores. Esses meios se sustentam na ideia de Cohen e Lotan (2017), que se apresentam na Figura 64.

Figura 64 – Recursos da atividade



Fonte: Cohen e Lotan (2017, p. 88).

A diferença dos recursos apresentados por Cohen e Lotan (2017), para os utilizados na formação, é que ao invés de fazer uso de relatórios individuais, tendo em vista os preceitos da TO, os relatórios serão realizados em grupo, assim, cada problema dos cartões tarefas terá um relatório final realizado pelo grupo.

Foi feito um planejamento inicial da formação (Apêndice L) em relação às informações gerais, ao programa a ser realizado, à ementa da formação, à metodologia utilizada na aplicação e à avaliação dos discentes participantes. A formação teve carga horária de 40h/a, que foram divididas em um cronograma prévio (Apêndice M), por problemas das tarefas da atividade. Contudo, esse cronograma foi apenas um norte quanto ao tempo para introdução do que aconteceria nos encontros, para avisos, para a discussão entre o grupo, para pensar e resolver os problemas, também foi reservado um tempo para discussão em um grupo geral com todos os discentes e para o fechamento do encontro, com lembretes de preenchimento da ficha de avaliação e de envio dos relatórios.

Destaca-se que os cartões tarefa, particularmente, foram separados por problemas, dessa maneira, os alunos liberavam o problema seguinte por meio de uma senha fornecida ao término do problema anterior. Essa foi uma forma adotada para que eles se atentassem ao que era proposto no problema por eles mesmos e não nos seguintes, preservando o nível de complexidade.

Desse modo, cada tarefa teve uma carga horária condizente com o cronograma estipulado anteriormente, mas, principalmente, com a demanda e necessidade dos discentes por mais discussões e debates para resolver os problemas. Por isso, apresenta-se, no Quadro 11, a carga horária de cada tarefa da atividade.

Quadro 11 – Carga horária das tarefas

TAREFA	ASSUNTO	CH
1	Sobre o contexto de elaboração do tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments*... e a Matemática percebida no frontispício do documento	4h/a
2	Conhecimento sobre o instrumento *Cross-staff* desenvolvido por Edmund Gunter, estudo inicial sobre a escala dos números e sobre os conhecimentos incorporados nela	4h/a
3	Sobre o uso da escala dos números para encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua e os saberes mobilizados nesse manuseio	8h/a
4	Aplicação do uso da proporção contínua em problemas contextualizados	4h/a
5	Acerca do uso da escala dos números para obter a média proporcional de dois números e os saberes mobilizados nesse manuseio	6h/a
6	Aplicação do uso da média proporcional em problemas contextualizados	10h/a
7	Sistematização das ideias matemáticas mobilizadas durantes as tarefas	4h/a

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

Apresentada a estrutura geral da aplicação da atividade, parte-se, agora, para especificações quanto ao *lócus* da pesquisa e sobre os licenciandos em Matemática, da UECE, que participaram da formação.

5.4.2 O lócus da pesquisa e os sujeitos da formação

Com o planejamento da atividade montado, foi realizada uma parceria com o Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática, vinculado à Universidade Estadual do Ceará, haja vista que o grupo tem o projeto Guarda-Chuva, que é voltado para a formação de professores no que se refere à interface entre história e ensino de Matemática para a aplicação da atividade.

Por conseguinte, com a aprovação prévia do Conselho de Ensino, Pesquisa e Extensão (CEPE), do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), para a aplicação da pesquisa[98], oito discentes do curso de Matemática, da UECE, interessaram-se em participar da formação.

Esses discentes responderam a um questionário inicial, por meio do *Google Forms*, a respeito de informações pessoais e sobre a vida acadêmica, como os seguintes questionamentos:

1) Nome completo
2) E-mail
3) Você possui recursos para imprimir um documento?
4) Você tem um compasso?
5) Em qual fluxo você está matriculado?
   - Fluxo de 2008
   - Fluxo de 2018
6) Qual semestre você está cursando?
7) Você cursou alguma disciplina que envolvesse o estudo de sequências numéricas? Se sim, qual?
8) Você já cursou a disciplina de Geometria Euclidiana Plana?
9) Você já cursou a disciplina de Desenho Geométrico?

A pergunta 3) está vinculada à possibilidade de o discente imprimir a escala dos números, relacionando-se ao questionamento 4) – se eles tinham um compasso, uma vez que precisariam para manipular a escala. Já o fluxo em que eles estão matriculados e o semestre cursado interfere nas disciplinas que eles já têm ou não conhecimento sobre. Verificou-se que: um estava cursando o segundo semestre; três cursavam o quarto semestre; dois cursavam o sétimo e dois, o oitavo semestre.

Em relação às disciplinas cursadas, que envolvessem sequências numéricas, foram relatadas cinco disciplinas: Matemática Elementar I; Conjuntos e Funções; Cálculo I*;* Cálculo II e Análise Matemática. A respeito da disciplina de Geometria Euclidiana Plana, todos os discentes a haviam cursado e de Desenho Geométrico, apenas cinco discentes dentre os oito. Esses questionamentos foram feitos para averiguar os conhecimentos prévios dos discentes, algo que a TO preza para a atividade.

A divisão dos participantes em grupos para a realização da atividade se deu pelo critério de semestre e de disciplinas cursadas, haja vista que seria necessário mobilizar tanto aspectos geométricos como aritméticos, logo, os discentes do segundo e quarto semestres compuseram

[98] Número do parecer de aprovação do projeto: 4.391.528.

um grupo, pois um deles já tinha cursado a disciplina de Desenho Geométrico e os outros não e os demais, do sétimo e oitavo semestres, formaram o outro grupo, uma vez que compartilhavam conhecimentos prévios equivalentes.

Também foi solicitado que eles assinassem o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE, para a participação da pesquisa. Com o formulário inicial e o termo devidamente assinado e preenchido, deu-se início à formação.

5.4.3 Sobre a coleta de dados

Os procedimentos para a coleta de dados "[...] incluem estabelecer as fronteiras para o estudo, coletar informações através de observações e entrevistas desestruturadas (ou semi-estruturadas), documentos e materiais visuais, bem como estabelecer o protocolo para registrar informações" (CRESWELL, 2007, p. 189). Portanto, optou-se por alguns instrumentos de coleta: formulários *on-line*, anotações da pesquisadora, relatórios dos grupos, gravação das salas remotas utilizadas para os encontros, gravação de áudios, vídeos gravados pelos grupos e gravação da discussão geral ou final de cada encontro.

Como as reuniões aconteceram remotamente, foi possível a separação dos grupos por meio da criação de salas no *Zoom Meetings*, desse modo, quatro discentes ficaram em uma sala virtual e o outro grupo ficou em uma sala distinta, assim, impossibilitando informações entre os grupos no primeiro momento.

A pesquisadora dispôs de dois computadores para acompanhar, simultaneamente, os dois grupos e interagir quando necessário com ambos. A coleta dos dados aconteceu por meio de gravação das salas, em que, no começo de cada encontro, era solicitado que os discentes deixassem as câmeras ligadas para poder captar os movimentos e expressões dos licenciandos. Entretanto, por conta de falhas na rede, em alguns momentos, os participantes tiveram que desligar as câmeras para estabilizar a conexão.

Os problemas das tarefas propostas solicitavam um produto, por isso, os grupos redigiram relatórios para explicar, responder e/ou apresentar o que era requerido em cada problema, gerando um relatório ou uma gravação de vídeo, que foram anexados em um formulário *on-line*.

Diante dos dois grupos formados, selecionou-se, para a análise, o grupo 1, composto pelos discentes do segundo e quarto semestres, a escolha adveio de percepções acerca das contribuições nas discussões do grupo em relação ao problema de pesquisa (CRESWELL, 2007).

Com a escolha do grupo e dos dados coletados a serem analisados, dispõem-se, no próximo capítulo, o procedimento metodológico para analisá-los, a análise propriamente dita dos dados coletados levando em consideração o foco da pesquisa e algumas discussões dos resultados alcançados.

6 MOBILIZANDO SABRES SOBRE MÉDIA GEOMÉTRICA A PARTIR DE UMA ANÁLISE SEMIÓTICA

Após o estudo contextual, historiográfico, epistemológico da elaboração e da aplicação da atividade, há o momento de coleta de dados e a fase de análise, que está vinculada diretamente com o objetivo da pesquisa. Desse modo, este capítulo trata sobre a análise dos dados obtidos a partir de uma formação com licenciandos em Matemática, da Universidade Estadual do Ceará.

Neste capítulo, é apresentado o método adotado para analisar os dados, em particular, a semiótica, sob o olhar da Teoria da Objetivação, enfatizando seus construtos metodológicos de nó, contração semiótica, feixe semiótico, iconicidade e orquestração icônica, elementos que fornecem suporte para a análise dos trechos relevantes da formação voltados para a mobilização da média geométrica.

Em seguida, é feita uma síntese da aplicação das tarefas de um a quatro, que tiveram, na formação, o papel de pilar, a fim de que os licenciandos conhecessem o contexto de elaboração do tratado, da escala e do seu manuseio básico. Nas sessões posteriores, apresenta-se a análise semiótica do problema um da tarefa cinco e os problemas um e quatro da seis, que tratam sobre a manipulação da escala dos números para encontrar a média proporcional entre dois números, uma vez que há, nesses momentos, a mobilização de saberes matemáticos, que são associados à média geométrica por parte dos discentes ativos no labor conjunto. Por fim, apresentam-se as discussões gerais sobre a análise dos dados.

6.1 Método de análise semiótica

Como visto no capítulo anterior, no decorrer da aplicação da atividade em vista da TO, há o processo de objetivação, em que se apresentam a linguagem, os gestos, a entonação da voz e o ritmo. Esses elementos são entendidos como meios semióticos de objetivação a partir da abordagem proposta por Vygotisky[99], já os registros semióticos são considerados amplamente como tudo que pode ter significado.

A perspectiva vygotskyana de semiótica está vinculada a uma visão histórico-cultural, em que o signo é entendido como elemento auxiliador na organização do comportamento humano, relaciona-se com a cultura e o meio social em que o indivíduo está inserido (MOREY,

[99] Há outras concepções sobre semiótica, como a de Pierce e de Saussure, para mais informações, vide: Presmeg *et al*. (2016).

2020). Assim, “a transformação da mente humana que os signos efetuam está relacionada ao seu papel histórico-cultural. Ou seja, depende de como os signos significam e são usados coletivamente na sociedade” (PRESMEG *et al.*, 2016, p. 11, tradução nossa)[100].

A definição de saber, pela TO, leva em conta a semiologia, uma vez que, “ao definir saber como processos de ação e reflexão, estamos falando de um período de tempo durante o qual dada cultura vai refinando por gerações modos de agir e refletir sobre dado assunto e os signos são partes integrantes desse processo de constituição do saber” (MOREY, 2020, p. 65). Por esse motivo, os signos estão diretamente relacionados ao processo de objetivação no labor conjunto.

Destarte, os signos emergem de acordo com a cultura e a sociedade em que o indivíduo está posto, eles estão em um determinado sistema de signos, que adquire significado (PAIVA, 2019). Em outros termos, os signos são parte integrante do pensamento humano ao desenvolver uma atividade.

Já os artefatos se configuram como materiais (objetos e instrumentos) que incorporam saber, este pode emergir através da atividade, o pensamento mobilizado para isso, nesse caso, desenha-se no território do pensamento artefatual (RADFORD, 2008a).

Dados os pressupostos dos signos e do artefato conforme a TO, Radford e Sabena (2015) apresentam construtos metodológicas importantes para compreender o processo de objetivação: o conceito de nó semiótico e o de feixe semiótico. Esses elementos estão vinculados a momentos do labor conjunto, nos quais acontecem a coordenação de meios semióticos no processo de objetivação (PAIVA, 2019).

Portanto, compreende-se como nó semiótico “[...] uma parte da atividade conjunta de alunos e professores, onde signos corporificados e outros de vários sistemas semióticos são colocados para trabalhar juntos em processos de objetificação” (RADFORD; SABENA, 2015, p. 167, tradução nossa)[101]. Esse construto está vinculado ao labor conjunto entre alunos e pesquisador/professor.

Desse modo, o nó semiótico

> É um segmento de trabalho conjunto em que ocorre um encontro progressivo com a matemática. O encontro é descrito em termos de noticiar, agarrar, dar sentido, perceber, tornar-se consciente. É por isso que os nós semióticos se concentram na

[100] Lê-se em inglês: “The transformation of the human mind that signs effectuate is related to their social-cultural-historical role. That is, it depends on how signs signify and are used collectively in society” (PRESMEG *et al.*, 2016, p. 11).
[101] Lê-se no original: “[…] a part of the students’ and teachers’ joint activity where embodied and other signs from various semiotic systems are put to work together in processes of objectification” (RADFORD; SABENA, 2015, p. 167).

> atenção, na intenção e na construção de significado (PRESMEG *et al*., 2016, p. 20, tradução nossa)[102].

Destacam-se como nós semióticos os segmentos dispostos na resolução de um problema da atividade, uma sequência de gestos indicativos ou icônicos ou de palavras e a posição corporal dos sujeitos, que acontecem juntos no processo de objetivação (PRESMEG *et al*., 2016; RADFORD *et al*., 2003, 2021). A evolução desses nós, no decorrer da atividade, denomina-se como contração semiótica.

A evolução dos nós semióticos fornece uma noção de como está ocorrendo a atividade e os processos de objetivação. Dessa forma, "uma contração semiótica refere-se à reorganização dos recursos semióticos que ocorre como resultado do aumento da consciência dos alunos sobre os significados e interpretações matemáticas" (RADFORD; SABENA, 2015, p. 167, tradução nossa)[103].

Uma contração semiótica pode ser visível ao resumir um processo ou ao abstrair um procedimento em uma fórmula matemática. Nesses casos, os sujeitos precisam optar pelo que é mais relevante para se dispor em um resumo ou em uma fórmula, caracterizando em uma tomada de consciência do que é essencial e do que não é (RADFORD, 2008b).

O processo de retomada de saberes mobilizados antes, para entender um aspecto matemático mais elaborado requerido pela atividade (retomando o princípio de que os problemas da atividade devem respeitar níveis de dificuldade e elaboração de saber do mais simples ao mais complexo), configura-se como iconicidade.

A iconicidade está presente na atividade como a associação de elementos matemáticos semelhantes em procedimentos vistos anteriormente, em outras palavras, segundo Radford (2008b, p. 123, tradução nossa)[104], "[...] é um dos processos que nos permite fazer a transição progressiva da imprecisão para uma daquelas camadas mais claras e inteligíveis de objetificação", remetendo à consciência da potencialidade para tornar-se conhecimento.

Outro elemento que emerge do trabalho em conjunto é a orquestração icônica, na qual entende-se como a

> [...] expressão pessoal do enunciado de alguém reformulado com nossos próprios gestos, ações, palavras, tons e intenções. É icônico no sentido de que minha formulação se assemelha a declaração anterior. É uma orquestração no sentido de que

---

[102] Lê-se no original: "It is a segment of joint labor in which a progressive encounter with mathematics occurs. The encounter is described in terms of noticing, grasping, making sense, awareness, becoming conscious. This is why semiotic nodes focus on attention, intention, and meaning making" (PRESMEG *et al*., 2016, p. 20).

[103] Lê-se no original: "A semiotic contraction refers to the reorganization of semiotic resources that occurs as a result of the students' increased consciousness of mathematical meanings and interpretations" (RADFORD; SABENA, 2015, p. 167).

[104] Lê-se no original: "[…] is one of the processes which allows us to make the progressive transition from fuzziness, to one of those clearer and more intelligible layers of objectification" (RADFORD, 2008b, p. 123).

> é mais do que uma cópia: permite que minha consciência alcance um domínio de compreensão que é novo para mim. A orquestração icônica é um mecanismo poderoso de objetificação –usado com frequência pelos alunos em sala de aula (RADFORD, 2009, p. 123, tradução nossa)[105].

Nesse sentido, a orquestração icônica não é uma cópia ingênua de ações de outro sujeito participante da atividade, é uma nova visão daquelas interpretações, é uma adequação/atualização delas às próprias concepções e aos entendimentos do indivíduo.

No que se refere ao feixe semiótico, entende-se, conforme Arzarello *et al*. (2008, p. 100, tradução nossa)[106], como

> [...] um sistema de signos –com a noção abrangente de signo de Peirce[107]– que é produzida por um ou mais sujeitos interagindo e que evolui no tempo. Normalmente, um feixe semiótico é feito de signos que são produzidos por um aluno ou por um grupo de alunos enquanto resolvem um problema e/ou discutem uma questão matemática. Possivelmente, o professor também participa dessa produção, e assim o feixe semiótico pode incluir também os signos produzidos pelo professor.

O feixe semiótico não é estático, ele é dinâmico e se modifica de acordo com a atividade exercida, em que ele é movimentado pelos indivíduos. Esse elemento permite observar a atividade de maneira integrada como ação e transformação dos signos. Em especial, o feixe semiótico “[...] enquadra adequadamente o papel dos gestos nas atividades matemáticas. Para isso, consideramos um feixe semiótico feito de fala, gestos e inscrições (e suas relações) construído por alunos e professor e analisamos como ele evolui no tempo” (ARZARELLO *et al*., 2008, p. 100, tradução nossa)[108].

O feixe semiótico pode ser analisado de duas maneiras, que são diferentes, mas que se complementam em uma análise profunda acerca do processo de objetivação. Arzarello *et al.* (2008, p. 100-101)[109] esclarecem que

---

105 Lê-se no original: “personal expression of somebody’s utterance reformulated with our own gestures, actions, words, tones and intentions. It is iconic in the sense that my formulation resembles the previous utterance. It is an orchestration in the sense that it is more than a copy: it allows my consciousness to reach a realm of understanding that is new for me. Iconic orchestration is a powerful mechanism of objectification—one that is frequently used by the students in the classroom” (RADFORD, 2009, p. 123).

106 Lê-se no original: “[…] a system of signs —with Peirce’s comprehensive notion of sign— that is produced by one or more interacting subjects and that evolves in time. Typically, a semiotic bundle is made of the signs that are produced by a student or by a group of students while solving a problem and/or discussing a mathematical question. Possibly, the teacher too participates in this production, and so the semiotic bundle may include also the signs produced by the teacher” (ARZARELLO *et al*., 2008, p. 100).

107 Para Peirce (2005, p. 46), signo é “[...] aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém”.

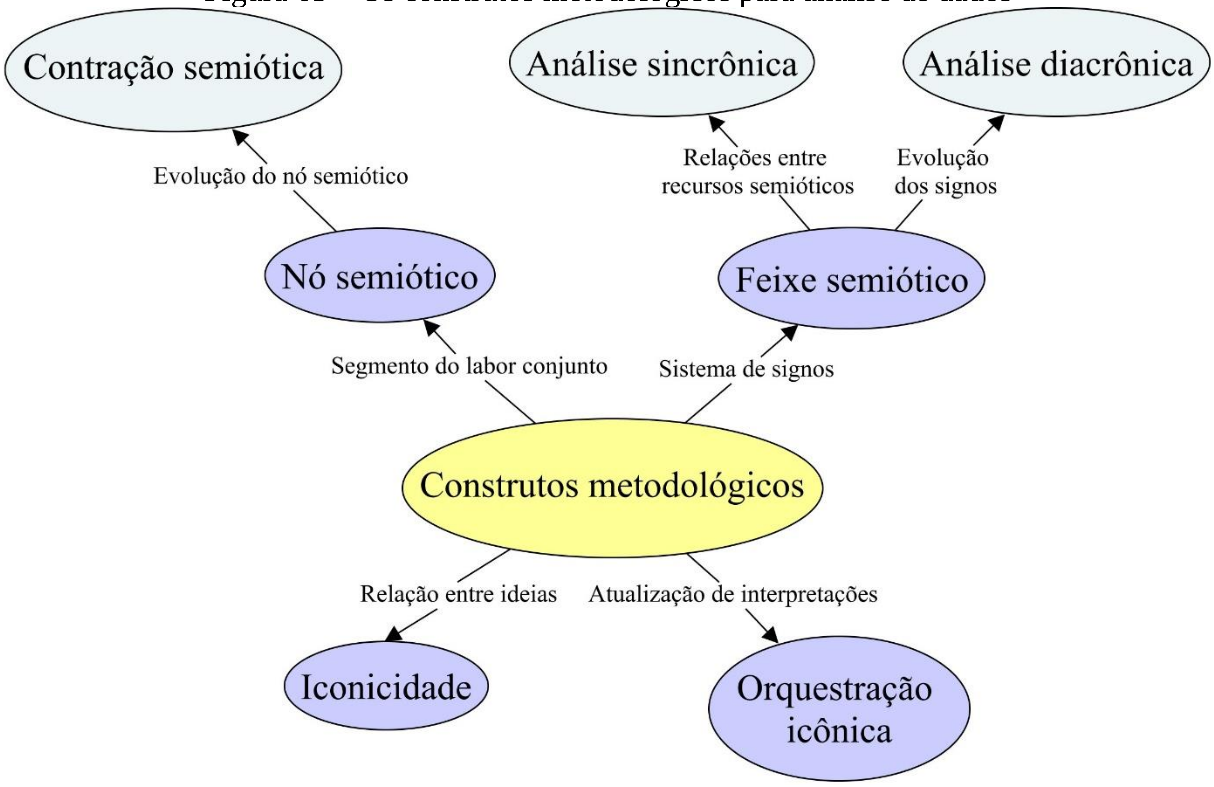
108 Lê-se em inglês: “[...] properly frames the role of gestures in mathematical activities. To get this, we consider a semiotic bundle made of speech, gestures, and inscriptions (and their relationships) built up by students and teacher and we analyze how it evolves in time” (ARZARELLO *et al.*, 2008, p. 100).

109 Lê-se em inglês: “The first one is synchronic analysis, which considers the relationships among different semiotic resources simultaneously activated by the subjects at a certain moment. The second is diachronic analysis, which focuses on the evolution of signs activated by the subjects in successive moments (in short or long periods of time). Together, synchronic and diachronic analysis allow us to foreground the roles that the different types of

> A primeira é a análise sincrônica, que considera as relações entre diferentes recursos semióticos ativados simultaneamente pelos sujeitos em um determinado momento. A segunda é a análise diacrônica, que se concentra na evolução dos signos ativados pelos sujeitos em momentos sucessivos (em curtos ou longos períodos de tempo). Juntas, as análises sincrônica e diacrônica nos permitem destacar os papéis que os diferentes tipos de signos (gestos, fala, inscrições) desempenham nos processos cognitivos dos alunos.

É importante realizar a análise aliando as duas maneiras, haja vista que elas são complementares e responsáveis pela percepção dos tipos de signos e dos processos de objetivação. Destaca-se que o nó e o feixe semiótico têm focos diferentes, enquanto o primeiro se concentra no segmento do trabalho em conjunto e na coordenação dos modelos sensoriais, o outro se atenta aos signos e à sua evolução na atividade. Observa-se, na Figura 65, um esquema acerca dos construtos metodológicos: nó, contração, feixe semiótico, iconicidade e orquestração icônica.

Figura 65 – Os construtos metodológicos para análise de dados



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Logo, os construtos metodológicos apresentados anteriormente se evidenciam no decorrer do labor conjunto. Em particular, eles configuram momentos, ações e representações

---

signs (gestures, speech, inscriptions) play in students’ cognitive processes” (ARZARELLO *et al.*, 2008, p. 100-101).

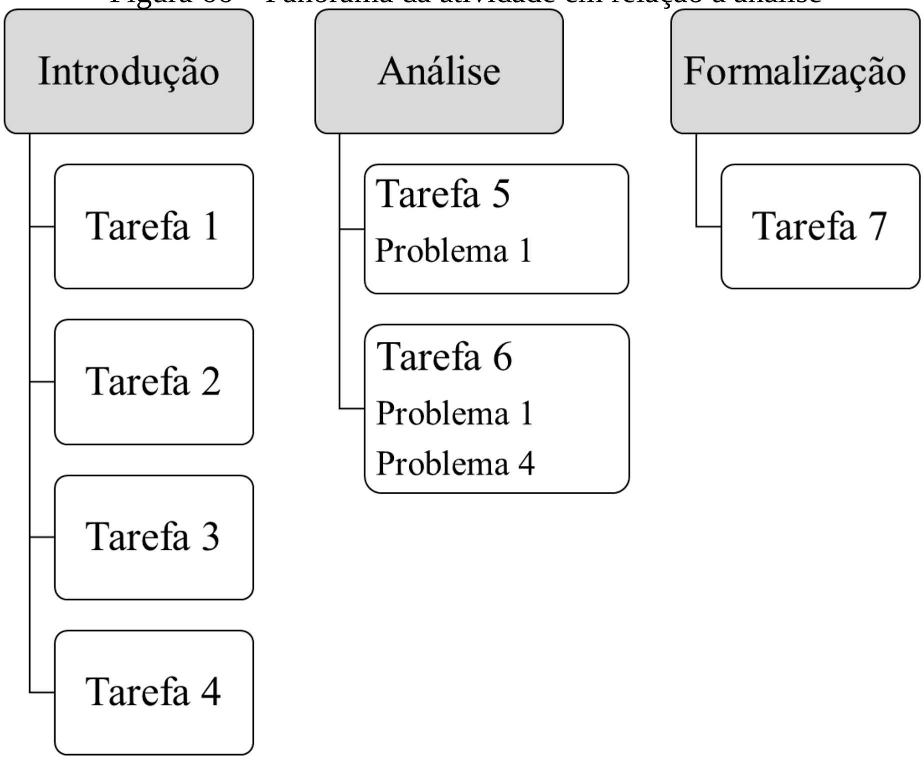
no decorrer da análise dos dados. Assim, apresenta-se, a seguir, a descrição das tarefas um, dois, três e quatro, mesmo não sendo realizada a análise delas neste estudo, são essenciais para a atividade.

6.2 Elementos iniciais da atividade

A atividade proposta na pesquisa, que estava relacionada à formação com licenciandos, teve, em seu escopo, sete tarefas, cujos planejamentos foram relatados no capítulo anterior. Foram construídas segundo uma lógica de conceitos matemáticos, obedecendo a níveis de complexidade crescente e com intencionalidades definidas, sob o pano de fundo da interface entre história e ensino de Matemática.

Assim, todas as tarefas tiveram papéis essenciais para que os discentes chegassem a alcançar o objeto proposto para a atividade, de que os discentes desenvolvessem ideias sobre média geométrica e o objetivo da pesquisa. A Figura 66 resume o panorama da atividade quanto à análise.

Figura 66 – Panorama da atividade em relação à análise



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Dessa maneira, as tarefas um, dois, três e quatro foram o alicerce para que os discentes conhecessem os aspectos contextuais sobre o desenvolvimento do tratado, a escala dos números em relação aos saberes matemáticos incorporados e a manipulação da escala para encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua. Esses elementos perpassaram por toda a atividade, infere-se, portanto, a importância desse conjunto de tarefas.

Como o foco do objeto está vinculado às ideias sobre média geométrica mobilizadas pelos discentes participantes da formação, optou-se por analisar os problemas das tarefas cinco e seis que estivessem diretamente relacionados ao objeto da atividade e, consequentemente, ao do estudo. Então, observou-se que os problemas um da tarefa cinco e um e quatro da seis atenderiam ao que foi proposto na pesquisa.

Destarte, enfatiza-se, nesta sessão, os saberes que foram estimulados e estruturados conforme os discentes avançavam na resolução dos problemas das tarefas um, dois, três e quatro, nas quais eles se habituaram a pensar sobre logaritmos, proporção contínua e relações matemáticas visitadas para compreender esses aspectos. Expõe-se, no Quadro 12, a síntese das tarefas um, dois, três e quatro.

Quadro 12 – Síntese das quatro primeiras tarefas

Tarefa	**Período**	**Carga horária**	**Discussão**
1	25/05/2021 a 27/05/2021	4h/a	Discussões acerca do contexto no qual o tratado foi elaborado.
2	01/06/2021 a 03/06/2021	4h/a	Estudo sobre o instrumento *Cross-staff* e sobre os saberes incorporados na escala dos números.
3	05/06/2021 a 17/06/2021	8h/a	Primeiras reflexões sobre o uso da proporção contínua com a manipulação da escala.
4	22/06/2021 a 24/06/2021	4h/a	Resolução de uma situação contextualizada com manuseio da escala dos números para uso da proporção continua.

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

À vista disso, na primeira tarefa, os discentes dispuseram, para esse momento, de um texto complementar de Cormack (2017b) acerca de Londres, no século XVII e de excertos do tratado de *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments*..., especificamente, do frontispício e de elementos internos do estudo, com a finalidade de que fossem discutidas questões contextuais sobre documento elaborado por Edmund Gunter, em que foram visualizados aspectos contextuais quanto à política vigente na Inglaterra do século XVII e à Matemática que permeava aquele período.

Nessa tarefa, mediante os quatro problemas dispostos no cartão tarefa um[110], os licenciandos ressaltaram aspectos voltados para a influência da igreja nos estudos realizados na

[110] Vide: Apêndice B, na página 196, para detalhes sobre os problemas.

época, relacionaram o tratado com a Matemática prática, no que se refere à navegação, agrimensura e astronomia.

Essa tarefa possibilitou que os discentes se situassem no contexto em que Edmund Gunter escreveu o tratado e desenvolveu a escala dos números, o que pode contribuir em suas formações como futuros professores, ao perceberem que a Matemática, naquela época, era tratada de forma diferente da modernidade.

A tarefa dois tinha como foco a discussão e a resolução dos quatro problemas do cartão tarefa dois[111] a respeito do instrumento *Cross-staff*, que traz a escala dos números, a qual foi estudada mais a fundo pelos discentes, uma vez que era de extrema importância que eles tivessem consciência de que os logaritmos são a base para a construção dessa escala. Assim, após desvelados os aspectos contextuais do tratado, os discentes adentraram nos saberes incorporados na escala desenvolvida por Gunter (1623) nesse recorte da atividade.

Foi a partir da tarefa dois que os discentes reconheceram o saber imerso na escala e puderam pensar, com profundidade, como os cálculos aritméticos acontecem por intermédio dela. Esse momento da atividade foi crucial para mobilizar os saberes acerca de logaritmos, algo que acarretou concepções mais elaboradas das manipulações da escala, vistas no decorrer da atividade.

A tarefa três adentrou no primeiro uso que Gunter (1623) traz da escala dos números, a respeito da proporção contínua, aspecto matemático que permeia vários usos da escala, sendo tomado como um uso elementar e básico para as demais manipulações com esse instrumento.

O cartão tarefa três[112], respectivo a essa tarefa, contém quatro problemas, os quais foram explorados com paciência, vista a importância desse primeiro contato com o uso da escala. Logo, os discentes se aprofundaram nas discussões acerca de cada problema e compreensão do procedimento matemático que envolve a proporção contínua, em que emergiram diversos saberes matemáticos, previamente destacados no capítulo 4 deste estudo.

Especificamente, os discentes mobilizaram saberes sobre logaritmos, progressão geométrica, proporcionalidade, dentre outros conceitos e a interrelação entre eles, associando os logaritmos com a PG, por exemplo. Essa tarefa possibilitou que os discentes formassem uma concepção sobre a proporção contínua, que os auxiliaram na resolução e na formulação de ideias para as demais tarefas.

Já a tarefa quatro decorre diretamente da anterior, haja vista que se trata de uma aplicação contextual da manipulação da escala dos números para encontrar um terço, um quarto,

[111] Vide: Apêndice D, na página 200, para detalhes sobre os problemas.
[112] Vide: Apêndice F, na página 203, para detalhes sobre os problemas.

um quinto etc. em proporção contínua. Portanto, os quatro problemas desse segmento da atividade foram elaborados para a percepção desse uso da escala em uma situação.

Mediante as ações voltadas para as concepções de proporção contínua, emergiram saberes matemáticos acerca de logaritmos, proporção e progressões geométricas. Percebeu-se uma elaboração mais refinada das ideias nesse momento, com interrelações de elementos matemáticos e retomada de concepções vistas nas tarefas anteriores.

As quatro tarefas apresentadas, anteriormente, foram vistas como uma introdução para que os discentes chegassem às demais tarefas. A quinta e sexta tarefa compõem o conjunto que será analisado, ressalta-se que somente alguns problemas dessas tarefas serão expostos, porque foi necessário selecionar momentos pontuais para responder à pergunta diretriz da pesquisa e alcançar o objetivo geral do estudo, como é justificado por Radford (2015), que a análise precisa se atentar aos momentos principais, dessa forma, selecionaram-se os segmentos relevantes (*salient segments*), que vão ao encontro do objetivo da pesquisa. Por fim, a tarefa sete formalizou as concepções matemáticas mobilizadas durante a atividade.

Nessa perspectiva, no rol de tarefas de introdução, os discentes tinham mobilizado, de forma concentrada e objetiva, os saberes necessários para se adentrar no uso da escala dos números para obter a média proporcional de dois números, uma vez que já foram relacionados aos logaritmos e à proporção contínua.

Assim, deu-se início, na próxima sessão, à análise da tarefa cinco, a qual trata sobre a média proporcional e se enceta o pensamento em torno da média proporcional, em seguida, a tarefa seis, que se concentra no mesmo aspecto da anterior.

6.3 Tarefa 5: adentrando às concepções sobre média proporcional

A partir da tarefa cinco sobre a manipulação da média proporcional, será realizada a análise em vista da abordagem semiótica descrita anteriormente. Optou-se, dessa maneira, iniciar por essa tarefa, devido ao amadurecimento das ideias dos discentes e pelo processo de encadeamento das ideias dos alunos a respeito da média proporcional, além dela conter segmentos significativos para o objetivo da pesquisa, de conhecer os processos matemáticos sobre a média geométrica que permearam a formação com licenciandos em Matemática, a partir do manuseio da média proporcional com a escala dos números.

Recapitulando os pressupostos da tarefa cinco, ela tem como foco abordar as primeiras concepções a respeito do manuseio da escala dos números para obter a média proporcional de dois números. A tarefa foi realizada nos dias 29 de junho e 6 de julho, contabilizando 6h/a divididas para a discussão e a resolução dos problemas propostos.

Na manhã do dia 29 de junho, todos os discentes receberam, por e-mail, o cartão recurso cinco, que contém o excerto do tratado de Gunter (1623) sobre o uso da escala dos números em relação à média proporcional e o cartão tarefa cinco, como explicitado no capítulo anterior, dividido por problemas, à medida que os alunos resolviam um problema, era liberado o acesso ao seguinte.

A intenção dessa tarefa, como descrita no capítulo anterior, era de abordar as primeiras concepções matemáticas acerca da média proporcional, que poderia, nesse processo, emergir da ideia de média geométrica. Observam-se, a seguir, os problemas da tarefa cinco, que os discentes tinham que discutir após a leitura do cartão de recurso cinco sobre o excerto de Gunter (1623), que trata sobre a manipulação da média proporcional:

1) **Procurem entender o manuseio da escala dos números para obter a média proporcional.**
2) Expliquem como se divide um segmento em duas partes iguais. Por que é necessário realizar esse procedimento para encontrar a média proporcional de dois números dados na escala?
3) Discutam a relação entre a manipulação da média proporcional e da proporção contínua. Destaquem aspectos semelhantes entre os dois manuseios.
4) Elenquem os saberes matemáticos que foram mobilizados. Descrevam, no mínimo, cinco, associando-os aos movimentos realizados com a escala dos números e o compasso. Para facilitar a organização das ideias, preencham o quadro em anexo.

Nessa conjuntura, apresenta-se, a seguir, a análise semiótica da leitura do cartão recurso cinco, posteriormente, do primeiro problema dessa tarefa, uma vez que são mobilizados aspectos matemáticos diferentes. Para isso, foi escolhida a gravação em vídeo da discussão do grupo um.

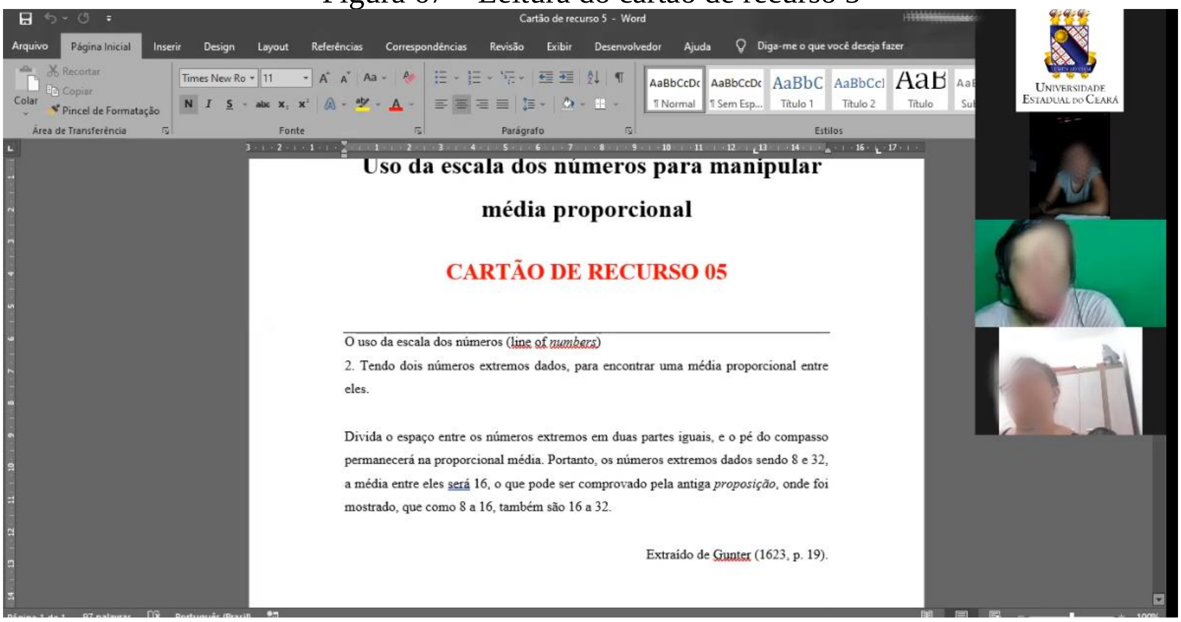
6.3.1 Discussões sobre a leitura do cartão de recurso da tarefa 5

O encontro para discussão do primeiro problema da quinta tarefa começou com os avisos padrões: de todos participarem da atividade e, se possível, ligarem as câmeras. As salas virtuais foram criadas no *Zoom Meetings* e os integrantes do grupo um, composto por quatro discentes de licenciatura em Matemática, começaram decidindo quem ficaria responsável por redigir o relatório dos problemas dispostos no cartão tarefa cinco. A Aluna A se voluntariou para ficar responsável pelo relatório dessa tarefa. Ressalta-se que uma discente dessa equipe chegou atrasada nesse dia.

Já nesse momento do labor conjunto, a ética comunitária fica evidente pelo esforço, pela confiança e pela organização dos discentes em decidirem primeiro quem seria responsável por redigir os relatórios dessa tarefa e em concordarem que a Aluna A ficasse encarregada disso. Algo que também acarreta no resumo das ideias discutidas no grupo e seu produto em registros, caracterizando, da parte da Aluna A, uma orquestração icônica, evidenciada no decorrer da atividade por ela e pelos outros membros do grupo.

Como de praxe, o grupo um se atentou, primeiramente, à leitura e à compreensão do cartão de recurso e o Aluno B se candidatou para lê-lo por meio do compartilhamento de tela, a fim de que todos do grupo pudessem acompanhar (Figura 67). Nesse momento, ainda não há discussões acerca do excerto do tratado disposto no cartão de recurso cinco, somente a leitura do texto.

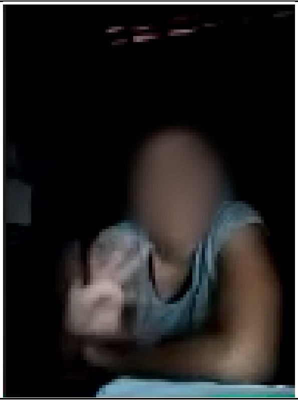
Figura 67 – Leitura do cartão de recurso 5



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao término da leitura, seguem-se ações, falas e gestos interessantes para a análise de como os alunos compreenderam, à primeira vista, a média proporcional. O Aluno B pergunta se as demais compreenderam o que Gunter (1623) traz no excerto, as alunas expressam incerteza quanto à compreensão, explicitam que não ficou claro só com uma leitura, dessa maneira, foi feita uma segunda leitura de forma pausada e retomando significados que eles formalizaram em tarefas anteriores. Verifica-se, no Quadro 13, o cenário instaurado após a primeira leitura.

Quadro 13 – Segmento após a leitura do cartão de recurso 5

Nº	Interlocutor	Discurso	Gesto
1	Aluno B	Vocês entenderam?	
2	Aluna D	Mais ou menos.	
3	Aluno B	Vou ler de novo. Tendo 2 números extremos dados para encontrar uma média proporcional entre eles. Os números extremos são os dois que ele dá né? São os dois que ficam lá quando você coloca o compasso. Esses são os dois extremos, então no exemplo dá 8 e 32, mas podia ser, sei lá, podia ser 1 e 4, 1 e 2, enfim, 1 e 4.	
4		**Vamos supor 1 e 4**, 1 e 4 seriam os dois extremos dados, são esses dois números que ele dá, que vai estar no caso que ele fala **extremo é no compasso** (*gesto com os dedos para representar o registro do compasso*) e aí para encontrar uma média proporcional então pelo que ele dá, a média proporcional é o número que está no meio dos dois.	

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

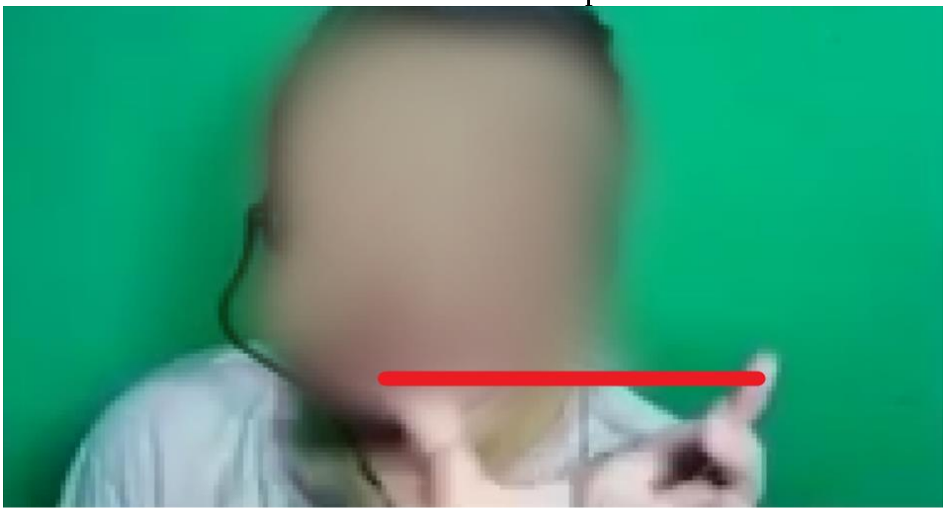
O Aluno B pergunta ao grupo se ficou entendido pela leitura como manipular a escala. Entretanto, fica evidente com o gesto da mão e fala da Aluna D (2021): "maios ou menos", que a primeira leitura da explicação de Gunter (1623) sobre a média proporcional não foi suficiente para que ela entendesse a manipulação.

Assim, o Aluno B explica, com suas palavras, a partir da linha 3 do quadro anterior, o que ele compreendeu pela primeira passagem sobre como manipular a escala para obter a média proporcional, na qual Gunter (1623, p. 19, tradução nossa) enuncia: "Tendo dois números extremos dados, para encontrar uma média proporcional entre eles".

No momento da formulação com os próprios signos do que eles interpretaram sendo a média proporcional, configura-se um nó semiótico, no qual a linha 4 traz a fala do Aluno B (2021): "**Vamos supor 1 e 4**, 1 e 4 seriam os dois extremos dados, são esses dois números que ele dá, que vai estar no caso que ele fala **extremo é no compasso** e aí para encontrar uma média proporcional então pelo que ele dá, a média proporcional é o número que está no meio dos dois".

Nesse sentido, o Aluno B tenta explicar para os demais participantes do grupo fazendo uso de gestos indicativos, que pretendem indicar o espaço registrado pelo compasso quando se tem dois números dados na escala, representado pelo segmento em vermelho na adaptação do gesto do Aluno B, na Figura 68, para tentar explicar essa citação de Gunter (1623) para seu grupo, juntamente com sua fala expressa anteriormente.

Figura 68 – Gesto indicativo da distância no compasso entre dois números dados



Fonte: Dados da pesquisa.

No decorrer da explicação, o Aluno B realiza o movimento do pensamento, em que ele mobiliza/revisita conceitos que ele já sabe, já tem consciência, a fim de trazer para sua realidade o que seria a média proporcional. Como evidência, observa-se o Quadro 14 sobre o cenário desse momento da atividade.

Quadro 14 – Associação da média proporcional com um conhecimento do repertório do aluno

Nº	Interlocutor	Discurso	Contexto
1	Aluno B	Isso aqui [a média proporcional] lembra muito **média geométrica** (*expressão de dúvida*)	Relação da média proporcional com algo que o aluno já conhece, a média geométrica.
2		Que é a raiz do produto 8 vezes 32 [exemplo trazido por Gunter (1623)], 2 elevado a 3, 2	

		elevado a 5 dá 2 elevado a 8 que fica 2 elevado a 4 que é 16. É o que a gente conhece hoje, sendo anacrônico, a **média geométrica** [...]. (*expressão mais confiante*)	

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

Após a explicação do que eles entenderam como média proporcional, o Aluno B expressa sua ideia, indicada no Quadro 14, do que pode ser a média proporcional, que Gunter (1623) se refere considerando os saberes matemáticos modernos que eles adquiriram em sua formação acadêmica. O discente relaciona com a média geométrica, ainda com receio dessa associação, que fica evidenciada pelo tom de voz utilizado por ele e pela necessidade que ele tem de pensar em um exemplo para confirmar sua hipótese.

Então, para atestar sua suposição, ele transpõe o exemplo que Gunter (1623) fornece, considerando os números 8 e 32 e aplica, implicitamente, o procedimento para obter uma média geométrica, explicitado na seguinte passagem: "[...] a raiz do produto 8 vezes 32, 2 elevado a 3, 2 elevado a 5 dá 2 elevado a 8 que fica 2 elevado a 4 que é 16. É o que a gente conhece hoje, sendo anacrônico, a **média geométrica**" (ALUNO B, 2021). Desse modo, o Aluno B faz alusão, nessa fala, à ideia matemática da média proporcional se assemelhar à de média geométrica. Em linguagem matemática, a fala do Aluno B se traduz sendo

$$\sqrt{8 \cdot 32} = \sqrt{2^3 \cdot 2^5} = \sqrt{2^8} = 2^{\frac{8}{2}} = 2^4 = 16$$

Destarte, da leitura inicial para essa, houve uma evolução no que diz respeito ao entendimento do grupo em relação ao que seria a média proporcional no Sistema Semiótico de Significação Cultural deles, que foi compreendido, dando significado à ideia de média geométrica, definida e apontada como aspecto que poderia ser mobilizado pela ação de manipular a escala para encontrar uma média proporcional de dois números no capítulo quatro desta pesquisa.

Houve, dessa forma, a caracterização de um feixe semiótico do momento da leitura 1 para a leitura 2, em que, a partir do discernimento sobre as extremidades do compasso em relação aos números dados e considerando a média entre 8 e 32, eles levaram a um outro nível de consciência, que eles conceberam sendo uma média geométrica.

A média geométrica foi um dos saberes delimitados no capítulo quatro e, possivelmente, seria mobilizado a partir da manipulação da escala dos números, contudo, esse assunto surgiu ainda na leitura do cartão recurso. O manuseio, propriamente dito, é apresentado, a seguir, por meio da resolução do problema um do cartão tarefa cinco.

6.3.2 Entendendo a manipulação da escala para obter a média proporcional de dois números dados mediante o primeiro problema da tarefa 5

Após a leitura e a compreensão do cartão de recurso cinco, o grupo iniciou a leitura do primeiro problema dessa tarefa, a saber: procurem entender o manuseio da escala dos números para obter a média proporcional. Assim, foi proposto que o grupo manipulasse a escala dos números seguindo os passos que Gunter (1623) fornece para encontrar a média proporcional de dois números, disposto no cartão de recurso cinco. Nesse segmento da atividade, os discentes discutiram, manipularam a escala e tentaram compreender como se realiza esse manuseio.

Para começar a manipular a escala para esse fim, os alunos consideraram o exemplo trazido por Gunter (1623, p. 19, tradução nossa), exposto no excerto do cartão de recurso cinco: "[...] os números extremos dados sendo 8 e 32, a média entre eles será 16 [...]". Os discentes, através dessa passagem, manipularam a escala para encontrar o número 16, média proporcional de 8 e 32. Esse é o primeiro contato que os discentes têm com a escala dos números para essa finalidade.

Os licenciandos perceberam que Gunter (1623) não explica como realizar a divisão do segmento de reta correspondente à distância entre os números 8 e 32 na escala. Logo, os discentes precisavam mobilizar saberes acerca de divisão de um segmento de reta em duas partes iguais, ou seja, um aspecto referente à mediatriz ou ponto médio de um segmento, assunto traçado no capítulo quatro, como potencial, ao se manusear a escala. É importante destacar a fala do Aluno B ao iniciar o processo de manipulação (Quadro 15).

Quadro 15 – Registrando a distância entre os números dados

Interlocutor	Discurso	Contexto
Aluno B	Ele dá 8 e 32, temos que pegar no começo da escala porque não tem 32 depois.	Seguindo as instruções de Gunter (1623), o grupo tenta manipular a escala para encontrar a distância que precisa ser dividida em duas partes iguais.

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

O primeiro passo para fazer essa manipulação, segundo o Aluno B (2021), é "[...] pegar no começo da escala porque não tem 32 depois". Ele se refere a encontrar um número no começo da escala, uma vez que, na outra extremidade do compasso, no caso o 32, cai fora dela. Portanto, encontra-se um 8 no começo e multiplica-se toda a escala por 10, tendo, na marcação de 3,2, a marcação equivalente a 32, o que foi explícito no capítulo três.

O 8, no começo da escala, revela que o grupo precisou retomar conceitos mais simples vistos anteriormente, especificamente, nas tarefas três e quatro, para montar um pensamento mais elaborado em relação ao problema proposto. Configurando, nessa conjuntura, um processo de iconicidade no desenvolvimento do pensamento, associando elementos anteriores para tentar resolver o problema.

Desse modo, os discentes utilizaram suas escalas impressas e seus compassos para seguir as instruções de Gunter (1623) e obter a média proporcional de 8 e 32. É percebido, pelos alunos, que o autor não revela como dividir a distância registrada entre os números dados em duas partes iguais, o que proporcionou discussões acerca de um procedimento para dividir um segmento pela metade, fato evidenciado na transcrição do momento no Quadro 16.

Quadro 16 – Discussões sobre como dividir um segmento em duas partes iguais

Nº	Interlocutor	Discurso	Contexto
1	Aluno B	Tem uma coisa que dá certo, é com o compasso, mas eu acho que não faz muito sentido, **não sei se eles usaram isso**. Dá para dividir no meio assim, usando a **mediatriz**. (*Tom de voz que expressa dúvida*)	
2		Se você fizer o círculo lá como é com a ponta seca no 8 e a com grafite no 32 e depois fizer ao contrário o círculo com a ponta seca no 32 e a ponta com grafite no 8 vão dar dois círculos diferentes né que vão se interceptar em dois pontos. Traçando a reta entre esses dois pontos ela passa exatamente no 16 que é a mediatriz. (O *aluno olha para baixo, pois enquanto fala está manipulando a escala*)	
3	Aluna C	O número 32 que você está falando é o número pequeno na escala?	
4	Aluno B	Sim, sim. A segunda marcação depois do 3.	
5	Pesquisadora	Tentem mobilizar esse procedimento.	
6	Aluno B	É difícil fazer com 8 e 32 porque o círculo passa da folha.	
7		Falem aí dois números que o produto deles dá uma raiz inteira [...]	
8	Aluna A	Faz com números pequenos, 4 e 9, não?	
9	Aluno B	Mas 4 e 9 dá quanto?	

10	Aluno A	36	Escolhidos os números 4 e 9, eles manipulam a escala com o compasso, seguindo o procedimento explicitado na linha 2.

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

Na primeira fala do Aluno B (2021), na linha 1 do quadro anterior, ele expressa: “Tem uma coisa que dá certo, é com o compasso, mas eu acho que não faz muito sentido, **não sei se eles usaram isso**”. O destaque, em sua fala, evidencia a preocupação em não ser anacrônico ao tentar manusear a escala, utilizando artifícios que não eram sabidos na época em que a escala foi desenvolvida. Entretanto, esse tipo de movimento de saberes modernos é parte integrante do labor conjunto, ao se fazer uso de recursos históricos.

Essa fala do Aluno B salienta que houve uma contribuição em sua formação, ao se apropriar da história para articulá-la ao ensino de Matemática, uma vez que houve cautela em considerar os saberes que estavam em vigor na episteme do período de desenvolvimento da escala, deixando de lado a visão presentista da história.

Diante da dúvida de como realizar o procedimento de divisão do segmento encontrado, o Aluno B (2021) sugere, em tom de dúvida, que “Dá para dividir no meio assim, usando a **mediatriz**”, como explicitado na linha 1 do Quadro 15. Os demais do grupo concordam com ele e o ajudam a relembrar como fazer essa construção geométrica. Essa associação de saberes auxilia os licenciandos a compreender a manipulação.

Na linha 2 do quadro, o Aluno B explica como obter a média de 8 e 32 a partir de saberes sobre construção geométrica, dado um segmento, nesse caso, correspondente à distância na escala entre os números dados. Nesse sentido,

> Se você fizer o círculo lá como é com a ponta seca no 8 e a com grafite no 32 e depois fizer ao contrário o círculo com a ponta seca no 32 e a ponta com grafite no 8 vão dar dois círculos diferentes né que vão se interceptar em dois pontos. Traçando a reta entre esses dois pontos ela passa exatamente no 16 que é a mediatriz (ALUNO B, 2021).

A partir dessa ideia, o grupo considerou outros dois números, em que a distância entre eles fosse menor que de 8 e 32 para comprovar o método proposto pelo Aluno B, visto que eles não tiveram a ideia de transpor o segmento entre 8 e 32 para uma folha de papel que coubesse os dois círculos citados no procedimento anterior.

Nessa perspectiva, o discente requereu: “falem aí dois números que o produto deles dá uma raiz inteira [...]” (ALUNO B, 2021). Ele pede uma raiz inteira para que o resultado seja mais preciso utilizando a escala. A Aluna A sugeriu, então, os números 4 e 9, pois o produto entre eles é o quadrado perfeito 36 e a distância entre 4 e 9, na escala, é menor que a de 8 e 32.

Nesse momento, o grupo segue as orientações do Aluno B de como dividir a distância entre 4 e 9 em duas partes iguais, mobilizando meios semióticos de fala, de gestos e de movimentos com o compasso e com a escala dos números, partindo da mesma explicação transcrita na linha 2 do Quadro 16. Todos chegam ao mesmo resultado, que a média proporcional de 4 e 9 é igual a 6, número encontrado ao traçar a reta entre as interseções dos círculos e ao intersectar a escala dos números, não há registro visual desse momento, uma vez que a câmera não registrou os movimentos com a escala. Destarte, eles não transpuseram a distância do compasso em um segmento de reta em outro local para realizar o procedimento, consideraram somente a distância do compasso entre os números 4 e 9 na escala e realizaram o processo.

Sendo uma escala logarítmica, aspecto visto e estudado na tarefa dois da atividade, o grupo decide analisar essa manipulação com base no saber incorporado na escala. Logo, eles mobilizaram seus conceitos acerca dos logaritmos e suas propriedades para encontrar a média proporcional de 8 e 32 (Quadro 17).

Quadro 17 – A média proporcional em relação aos logaritmos

Nº	Interlocutor	Discurso	Representação
1	Aluno B	O exemplo que ele dá é do 8 até o 32, o que ele pede para fazer é dividir essa distância ao meio.	$8 \to 32$
2		Para dividir em duas partes iguais, como isso aqui é uma distância, temos que saber que distância é essa, essa distância como é em logaritmo é o log de 32 menos log de 8. A distância é sempre o maior menos o menor.	$\underbrace{8 \to 32}$ $\text{Log } 32 - \text{Log } 8$
3		Só que pela propriedade isso aqui é log de 32 sobre 8.	$\underbrace{8 \to 32}$ $\text{Log } 32 - \text{Log } 8 = \text{Log } \frac{32}{8}$
4		Que é 32 sobre 8 4, então é o log de 4.	$\underbrace{8 \to 32}$ $\text{Log } 32 - \text{Log } 8 = \text{Log } \frac{32}{8} = \text{Log } 4$

5		Só que ele pede para dividir essa distância em duas partes iguais, então dividir essa distância é a mesma coisa que dividir o log de 4, **porque essa distância é o log de 4**. Em 2 partes iguais.	$\underbrace{8 \to 32}$ $\log 32 - \log 8 = \log \frac{32}{8} = \log 4$ $\frac{\log 4}{2}$
6		E aí o log de 4 dividido por 2 eu fiz lá todo aquele processo para dizer que é a mesma coisa que log 4 na base 100. Por conta daquela propriedade né vai levar... só que log de 4 na base 100 é a mesma coisa que log de 2 na base 10. Que é a mesma coisa que só log de 2 né base não precisa porque é tudo na base 10. **Então, dividir essa distância de 8 a 32 no meio é dividir no log de 2**.	$\underbrace{8 \to 32}$ $\log 32 - \log 8 = \log \frac{32}{8} = \log 4$ $\frac{\log 4}{2} = \log_{100} 4 = \log_{10} 2 = \boxed{\log 2}$

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

Nesse momento apresentado pelo Quadro 17, o Aluno B se apropriou de meios semióticos da fala; da ética comunitária entre o grupo, que deixou o Aluno B expor suas ideias e da linguagem matemática empregada por ele, o que caracterizou um feixe semiótico, o qual possibilitou que a ideia da manipulação da média proporcional tomasse um outro nível de consciência, analisando-se de modo diacrônico, agora não a vendo como uma média geométrica, e sim considerando o saber incorporado na escala, dos logaritmos.

Percebe-se que os meios semióticos utilizados pelo Aluno B se complementam, já que se torna visual o processo matemático que ocorre na escala nessa manipulação. O primeiro passo é encontrar a distância entre os números dados:

> Para dividir em duas partes iguais como isso aqui é uma distância, temos que saber que distância é essa, essa distância como é em logaritmo é o log de 32 menos log de 8. A distância é sempre o maior menos o menor. Só que pela propriedade isso aqui é log de 32 sobre 8. Que é 32 sobre 8 4, então é o log de 4 (ALUNO B, 2021).

De acordo com a fala do Aluno B, a distância entre 8 e 32 é equivalente ao log de 4 na escala, tendo a metade igual ao log de 2, ilustrando a fala da linha 5: “então, dividir essa distância de 8 a 32 no meio é dividir no log de 2” (ALUNO B, 2021), porque a metade da distância entre 8 e 32 corresponde ao logaritmo de 2.

Nota-se que, ao explicar a passagem, o Aluno B a representa matematicamente. Primeiramente, considerando os números 8 e 32, após isso, representa a distância entre eles, que é uma subtração dos seus logaritmos, em seguida, baseia-se na propriedade da divisão de logaritmos e chega à distância entre 8 e 32 na escala, sendo o log de 4, como observado na Figura 69.

Figura 69 – Distância em logaritmo entre 8 e 32

$$\underbrace{8 \to 32}$$

$$\text{Log } 32 - \text{Log } 8 = \text{Log } \frac{32}{8} = \text{Log } 4$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Entretanto, como se trata de encontrar a média proporcional entre 8 e 32, é necessário dividir a distância entre esses números, ou seja, log de 4 em duas partes iguais, em outras palavras, é preciso dividir log de 4 por 2, como mostra a representação matemática do Aluno B na Figura 70.

Figura 70 – Dividir a distância entre 8 e 32 em duas partes iguais

$$\underbrace{8 \to 32}$$

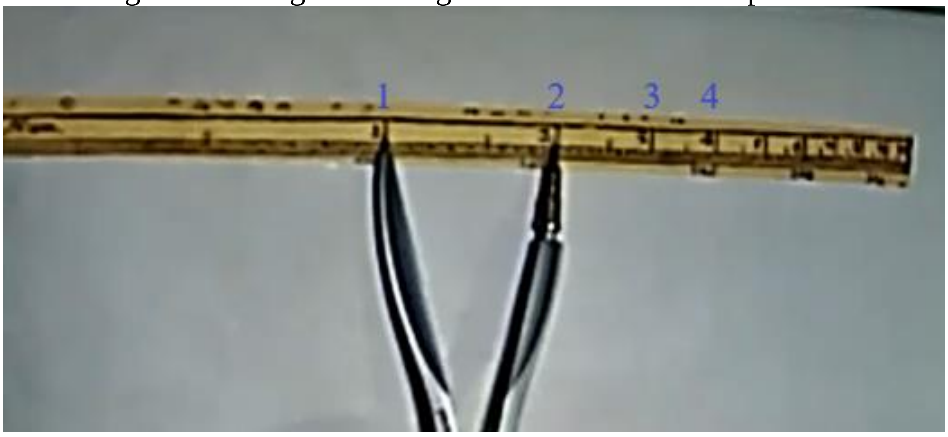
$$\text{Log } 32 - \text{Log } 8 = \text{Log } \frac{32}{8} = \text{Log } 4$$

$$\frac{\text{Log } 4}{2} = \text{Log}^{4}_{100} = \text{Log}^{2}_{10} = \boxed{\text{Log } 2}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Após o momento transcrito no Quadro 18, o grupo ainda justifica essas ideias logarítmicas pela escala, considerando a média entre 8 e 32. O Aluno B (2021) relata: “nós descobrimos pelos cálculos que a metade dessa distância [entre 8 e 32] é justamente o log de 2”, então, o Aluno B registra no compasso essa distância, como mostra a Figura 71.

Figura 71 – Registro do logaritmo de 2 com o compasso[113]



Fonte: Adaptado dos dados da pesquisa.

Após registrar no compasso o log de 2, o Aluno B (2021) diz: “Então isso aqui [*mostra o compasso com o registro do espaçamento do log de 2*] é a metade da distância de 8 para 32. Pra saber onde vai cair [a média] é só colocar uma ponta do compasso no 8 ou no 32”. Em seguida, ele posiciona a ponta seca no 8 e a outra ponta cai no 16 e, da mesma forma, quando posicionada uma ponta no 32, a outra extremidade vai apontar o número 16, como observado na sequência de imagens na Figura 72.

[113] As imagens estão distorcidas, pois foram retiradas das gravações da sala do *Zoom Meetings.*

Figura 72 – Sequência de movimentos a partir das ideias logarítmicas

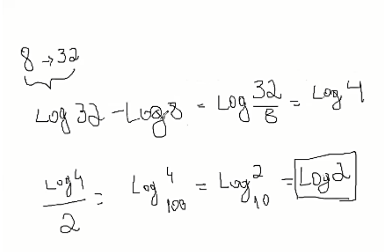
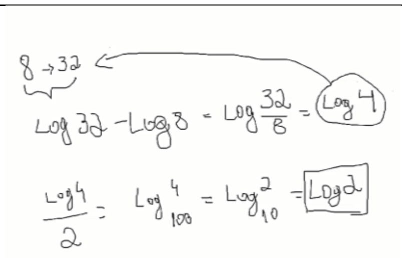
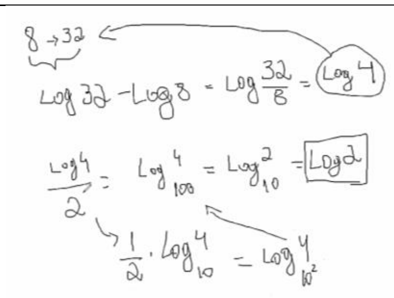
Fonte: Adaptado dos dados da pesquisa.

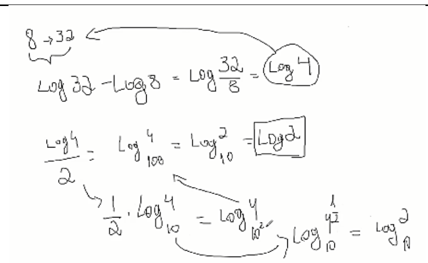
Com essas explicações e manuseios considerando os logaritmos, fica evidente a importância da tarefa dois, ao explorar o saber inserido na escala dos números. Isso possibilitou essa nova versão de concepções acerca da média proporcional, que será explorada em outros momentos da atividade.

Após a manipulação da escala apresentada acima, há outro momento importante para o entendimento da média proporcional em relação aos logaritmos incorporados na escala. Observa-se, no Quadro 18, o diálogo que segue após a manipulação da escala pelo Aluno B.

Quadro 18 – Relação das propriedades logarítmicas em relação à média proporcional

Nº	Interlocutor	Discurso	Representação	Contexto
1	Aluno B	Deu pra entender?		Pergunta em relação à manipulação da escala considerando os logaritmos.

2	Aluno A	Eu entendi, só tem que explicar as propriedades que tu usou e porque log de 2 é a metade de log 4 na base 100.		
3	Aluno B	Do 8 para 32 essa distância é a mesma coisa de log de 32 menos log de 8 porque como é a distância sempre do maior para o menor e é log porque é uma escala que foi graduada em logaritmo. **Só que como é uma subtração de dois logaritmos de mesma base isso tem aquela propriedade de que a subtração vira uma divisão**. É uma igualdade então vice-versa, a divisão vira subtração.		
4	Aluno B	Então, log de 32 menos log de 8 virou log de 32 sobre 8 e isso aqui 32 sobre 8 é 4, então isso aqui é o log de 4.		Percebe-se a concentração do grupo durante a explicação.
5	Aluno B	Então essa distância log de 4 aqui é essa distância aqui do 8 para o 32, essa distância tem um valor de log de 4. Só que ele não fala para dividir essa distância no meio? Dividir essa distância no meio é justamente dividir por 2 né. Então log de 4 dividido por 2 aqui dá igual... aí tem a		

		propriedade, eu vou fazer ela aqui antes de dar isso aqui, que diz que quando você está dividindo aqui é um caso eu vou escrever assim: é um meio de log de 4 né? Isso aqui é igual a log de 4 na base 10 elevado a esse número que está dividindo. É por isso que fica log de 4 na base 100. Por conta dessa propriedade quando está dividindo o log ele [...] na verdade estava aplicado na potência antes.		
6	Aluno B	Vou fazer de outra forma também, **um meio vezes log de 4 na base 10 é log de 4 na base 10 só que é log de 4 elevado a um meio né**? [...] E 4 elevado a um meio é justamente 2		

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

A Aluna A (2021) entende a manipulação da escala, contudo, as ideias matemáticas em relação às propriedades dos logaritmos não ficaram claras, nota-se na fala: “Eu entendi, só tem que explicar as propriedades que tu usou e porque log de 2 é a metade de log 4 na base 100”. O Aluno B utiliza artifícios parecidos com os da situação anterior para explicar esse ponto para a colega de grupo.

Ele aproveitou a escrita matemática feita anteriormente e a incrementou com mais relações logarítmicas a partir da linha 4 do Quadro 18, à medida que explicou cada passagem logarítmica. Assim, o Aluno B mobilizou meios semióticos de fala e de escrita para ilustrar, para a colega, as propriedades utilizadas na compreensão da manipulação da média proporcional, levando em consideração o conhecimento implícito da escala.

A organização do pensamento concebe-se, nesse segmento da tarefa, em duas partes associadas aos dois destaques na fala do Aluno B (2021), o primeiro na linha 3: "**Só que como é uma subtração de dois logaritmos de mesma base isso tem aquela propriedade de que a subtração vira uma divisão**" e o outro na linha 6: "**um meio vezes log de 4 na base 10 é log de 4 na base 10 só que é log de 4 elevado a um meio né**?", que revelam, de maneira informal, as propriedades dos logaritmos usadas para essa manipulação.

Dados os números 8 e 32, o primeiro destaque se traduz matematicamente sendo

$$\log 32 - \log 8 = \log \frac{32}{8} = \log 4$$

A primeira fala: "Só que como é uma subtração de dois logaritmos de mesma base isso tem aquela propriedade de que a subtração vira uma divisão" (ALUNO B, 2021), tendo como aspecto matemático principal a propriedade a respeito do logaritmo do quociente, de maneira formal: "em qualquer base a ($0 < a \neq 1$), o logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor" (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2013, p. 63).

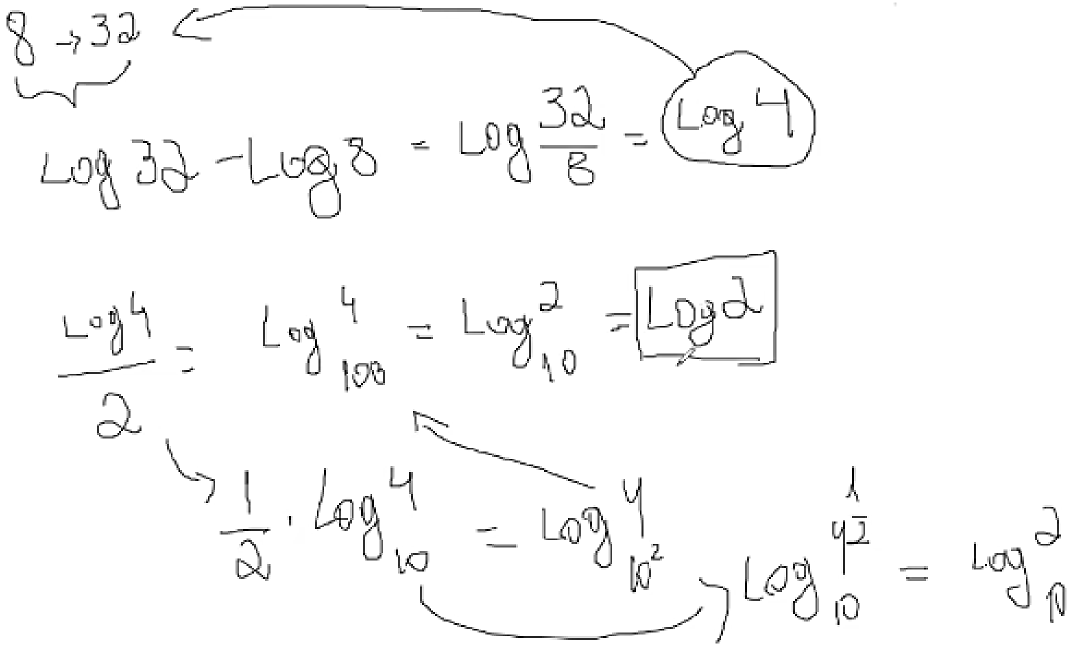
Essa passagem remete ao exposto no capítulo quatro, haja vista que houve a mobilização de conceitos logaritmos ao manipular a escala dos números, algo que foi ressaltado como potencial para o ensino a partir do manuseio da escala.

No segundo destaque da fala do Aluno B, tem-se matematicamente que

$$\frac{1}{2}\log 4 = \log 4^{\frac{1}{2}} = \log \sqrt{4}$$

A segunda parte do pensamento revelada pela fala: "um meio vezes log de 4 na base 10 é log de 4 na base 10 só que é log de 4 elevado a um meio né?" (ALUNO B, 2021), concentra-se em uma especificidade da propriedade do logaritmo da potência: "Em qualquer base a ($0 < a \neq 1$), o logaritmo da raiz enésima de um número real positivo é igual ao produto do inverso do índice da raiz pelo logaritmo do radicando" (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2013, p. 67). Há outros elementos matemáticos embutidos nesse conceito, mas o foco é perceber que o Aluno B deu significado a essas propriedades, uma vez que se apropriou de signos (falas, representações simbólicas) e, a partir disso, interpretou e deu significado conforme o contexto em que foi posto. Verifica-se, na Figura 73, o registro matemático final da explicação sobre as propriedades logarítmicas utilizadas.

Figura 73 – Explicando as propriedades dos logaritmos mobilizadas



Fonte: Dados da pesquisa.

Portanto, esse grupo formulou duas vertentes para a manipulação da escala dos números para obter a média proporcional de dois números: uma maneira considerando somente construções geométricas com o compasso, sem mobilizar conhecimentos intrínsecos à escala; e uma forma logarítmica, entendendo o processo matemático por trás do procedimento realizado na escala. Configuram-se, então, dois feixes semióticos, os quais mobilizam sistemas de signos particulares de cada forma de manipular a escala para o fim determinado. O próximo tópico traz outra perspectiva dos discentes quanto à média proporcional.

6.4 Tarefa 6: a média proporcional aplicada a um problema contextualizado

A tarefa seis da atividade teve início no dia 8 de julho, cujos participantes receberam o material necessário para sua realização na manhã desse mesmo dia, por e-mail e o término aconteceu no dia 22 de julho, contabilizando 10h/a remanejadas para discussão e resolução de problemas. Delimitou-se, para essa tarefa, a intenção de mobilizar os aspectos matemáticos que emergiram no decorrer da atividade em relação à média geométrica.

Assim, ela aborda a média proporcional a partir de áreas semelhantes de quadriláteros, em que se disponibilizaram, no cartão tarefa seis, quatro problemas, sendo eles introduzidos pelo seguinte cenário: “Os agrimensores estão fazendo levantamentos de terrenos, que serão vendidos para a construção de jardins e parques. Nessa apuração, foi constatado que há dois tipos de terrenos em Londres, retangulares e quadrangulares de superfícies iguais. Dessa maneira, respondam às situações usando a escala dos números".

Após esse cenário instaurado, decorreram os seguintes problemas:

1) **Na região leste de Londres, os terrenos retangulares têm comprimento de 27 jardas por 12 de largura. Qual o comprimento do lado dos terrenos quadrangulares[114] dessa região londrina?**
2) Já na região oeste de Londres, os agrimensores mediram os terrenos quadrados e constataram lado igual a 32 jardas. Se os terrenos retangulares tivessem 8 jardas de largura, quanto teriam de comprimento?
3) Se a quarta proporcional dos números 3 e 7 é igual ao lado do terreno quadrangular da região sul de Londres e a quinta proporcional entre 2 e 5 é o comprimento dos terrenos retangulares, qual a medida da largura dos lotes retangulares?
4) **O que é a média proporcional nesse contexto? Descrevam, em linguagem matemática, o manuseio da escala dos números para obter a média proporcional e escrevam possíveis fórmulas que matematizem essa manipulação.**

Nesta sessão, foram analisados os problemas um e quatro, uma vez que foram selecionados os momentos que condiziam diretamente com o objeto da atividade, o objetivo e a pergunta norteadora da pesquisa. Logo, apresentam-se, a seguir, os saberes mobilizados nesses problemas em relação à média geométrica.

6.4.1 Primeiras considerações para encontrar o lado do quadrado

O primeiro encontro para dar início à tarefa seis começou como de praxe, com os avisos sobre preenchimento de formulários, envios de relatórios e, se possível, que eles ligassem as câmeras. Para essa tarefa foi necessário o cartão de recurso seis, a escala e o compasso. As salas virtuais foram criadas no *Zoom Meetings* e os alunos do grupo um decidiram, como padrão no começo de toda tarefa, quem seria o responsável por redigir o relatório dos problemas dessa tarefa, em que foi decidido, por meio de uma conversa breve entre os integrantes do grupo, que o Aluno B ficaria responsável por isso.

Em seguida, o Aluno B leu o primeiro problema do cartão tarefa seis, visto que eles receberam os problemas separadamente, com o cenário apresentado no tópico anterior sobre os quatro problemas dessa tarefa. Eles foram elaborados com a finalidade de que os participantes

[114] Considera-se como terreno quadrangular um terreno quadrado.

da formação mobilizassem a média proporcional em um contexto geométrico, podendo construir novas concepções sobre a média geométrica.

O primeiro problema requeria que os alunos achassem o lado de um quadrado, tendo as dimensões de um retângulo de mesma área, especificamente, o enunciado trazia: “na região leste de Londres, os terrenos retangulares têm comprimento de 27 jardas por 12 de largura. Qual o comprimento do lado dos terrenos quadrangulares dessa região londrina?”.

Após a leitura do problema, os alunos ficaram pensativos quanto ao procedimento para responder à pergunta. No Quadro 19, observa-se o diálogo que aconteceu nesse momento da tarefa.

Quadro 19 – Primeiras discussões sobre o problema

Nº	Interlocutor	Discurso
1	Aluno B	Compreendido?
2	Aluna D	Então, o problema deu o comprimento de um terreno retangular e quer que a gente descubra o quadrangular né?
3	Aluno B	Pelo que entendi é isso e eles têm áreas iguais. **Então a primeira coisa seria encontrar a área do [terreno] retangular.**
4	Aluna D	Mas tecnicamente se eles têm a mesma área não necessariamente precisaria ser 12 por 12 o quadrangular?
5	Aluno B	A gente tem que descobrir a área do retangular e aí, na matemática de hoje, era para multiplicar 12 vezes 27 e tirar a raiz, esse seria o lado do terreno quadrangular agora usando a escala que a gente tem que fazer. O que eu entendi usando a escala esse, entre aspas, **tirar a raiz é achar a média proporcional** né? [*dúvida em relação à comparação de radiciação com a média proporcional*] **O problema é descobrir quanto é a área usando a escala**.

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

Na linha 2, a Aluna D interpreta o que o problema requer, que é achar o lado do quadrado, tendo as medidas de um retângulo, mas ela omite, em sua fala, a informação principal das questões dessa tarefa: que os terrenos retangulares e quadrangulares têm superfícies semelhantes. Quem destaca isso é o Aluno B (2021), na sua fala transcrita na linha 3: “Pelo que entendi é isso e eles têm áreas iguais. Então a primeira coisa seria encontrar a área do [terreno] retangular”.

Nesse sentido, o Aluno B sugere que é necessário encontrar a área do retângulo para, assim, achar o lado do quadrado. Contudo, a Aluna D levantou a hipótese de que o lado seria 12, haja vista que os quadriláteros têm superfícies iguais, porém o Aluno B explica: “A gente tem que descobrir a área do retangular e aí, na matemática de hoje, era para multiplicar 12 vezes 27 e tirar a raiz, esse seria o lado do terreno quadrangular agora usando a escala que a gente tem que fazer”.

Mais uma vez, revela-se a percepção do Aluno B em retratar sua explicação na Matemática moderna e evidenciar isso, o que indica sua preocupação em não ser anacrônico. Esse aspecto contribui na sua formação como futuro professor de Matemática, ao se deparar com aspectos históricos, ele terá cautela em analisá-los em seu contexto.

Deve-se ressaltar que eles estavam resolvendo problemas acerca de média geométrica, logo, pelo que Gunter (1623) descreve, basta encontrar a média proporcional entre os números dados. Dessa maneira, tendo como números dados os lados do terreno retangular, bastava encontrar na escala dos números a média proporcional entre eles.

Entretanto, não foi o raciocínio que o grupo um seguiu, o que se analisa pela fala: "O que eu entendi usando a escala esse, entre aspas, **tirar a raiz é achar a média proporcional né?**" (ALUNO B, 2021). Nessa passagem, há outra interpretação do que pode ser considerada a média proporcional, associando-a à radiciação.

Essa percepção do grupo um condiz com o uso da média proporcional, a julgar pela organização das utilizações da escala dos números por Gunter (1623), pois a média proporcional é como um pré-requisito para o manuseio da escala para encontrar uma raiz quadrada, o que se comprova pela descrição da manipulação da escala dos números para obter uma raiz quadrada: "a raiz quadrada é sempre a média proporcional entre 1 e o número dado e, portanto, pode ser encontrada dividindo o espaço entre eles em duas partes iguais" (GUNTER, 1623, p. 19, tradução nossa)[115].

Destaca-se que os discentes não receberam esse excerto do tratado sobre como obter uma raiz quadrada com a escala dos números. Destarte, eles movimentaram os saberes que eles tinham relacionados à área de quadriláteros e, posteriormente, utilizaram a média geométrica, adaptando-a para a lógica de resolução deles.

Nessa conjuntura, eles precisaram multiplicar 12 por 27 com a escala dos números, entretanto,o esse saber não foi mobilizado durante a atividade, o que causou, na Aluna D, dúvida em relação a esse procedimento, como se vê no Quadro 20.

Quadro 20 – Questionamentos sobre o saber necessário para multiplicar com a escala

Nº	Interlocutor	Discurso	Contexto
1	Aluna D	Na minha cabeça não faz sentido pela manipulação da escala para encontrar a área.	Revela desentendimento quanto à ideia de achar a área da superfície retangular.

[115] Lê-se no original: "the square Root is always the mean proportional between 1 and the Number given, and therefore to be found by dividing the space between them into two equal parts" (GUNTER, 1623, p. 19).

2	Aluna B	Por quê?	
3	Aluna D	Porque a manipulação que a gente viu até agora foi de configurar um valor para encontrar um mais aproximado na escala e só trabalhava com um número e não com dois e trabalhava com distâncias iguais. O 27 seria distância de quê? A gente faz a multiplicação das distâncias? (*Tom de voz que expressa dúvida*)	

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

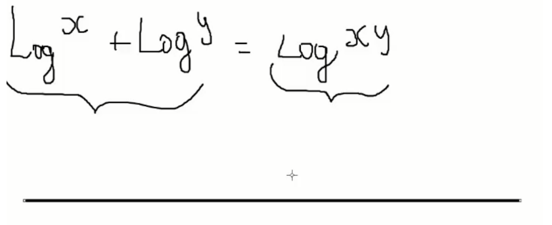
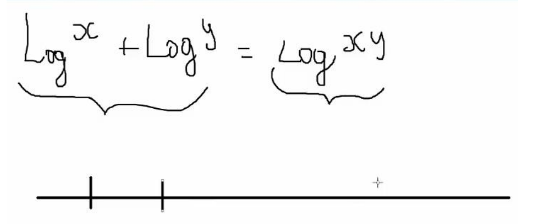
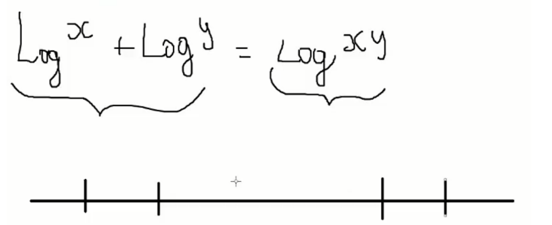
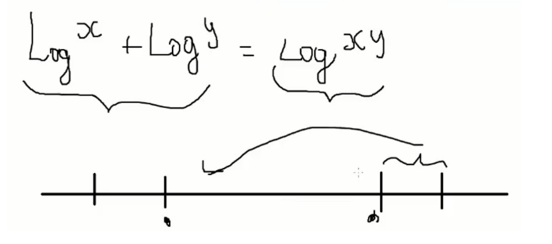
Para a Aluna D, multiplicar os números dados não era um procedimento necessário, visto que não se encaixa em nenhuma manipulação que eles tiveram contato, até aquele momento, com a escala. Isso salienta a organização dos problemas em ordem crescente de dificuldade e todos com ideias encadeadas.

Ela exemplifica que, até aquela tarefa, eles só tiveram contato com aspectos matemáticos sobre transformar um número para o começo da escala e sobre distâncias iguais, referindo-se à proporção contínua e à média proporcional. Ressalta-se que, de fato, as tarefas anteriores não explicitaram a multiplicação de números, todavia, a tarefa sobre a escala dos números e acerca da proporção contínua dá subsídios para a realização de multiplicação com a escala.

A Aluna D levantou questionamentos pertinentes seguindo a lógica da atividade, o saber relacionado à multiplicação de dois números com a escala não foi visto, até esse momento, de maneira explícita, no entanto, ela não consegue formular outro modo de encontrar o lado do quadrado apenas com os saberes mobilizados até então. Por isso, o grupo teve de resgatar aspectos intrínsecos à escala, a saber: logaritmos e suas propriedades para realizar a multiplicação desses números.

Na tarefa dois a respeito da construção da escala, os discentes tiveram contato com os logaritmos e como eles foram dispostos para construir a escala dos números. Isso e o fato deles, constantemente, revisitarem a Matemática inerente ao instrumento fez ser possível que o grupo discutisse possibilidades de se realizar multiplicação, como mostra o Quadro 21.

Quadro 21 – Ideias logarítmicas sobre multiplicação

Nº	Interlocutor	Discurso	Representação
1		Eu vou primeiro usar propriedade de logaritmo que a gente não usou ainda acho que a única que gente não sou, uma das poucas que a gente não usou ainda.	
2		**Log de x mais log de y com mesma base é igual log de xy.**	$Log\,x + Log\,y = Log\,xy$
3		E por que isso é importante?	
4		Porque como a gente quer uma multiplicação e ela é em logaritmo, a escala toda, **a gente quer a soma de 2 distâncias.**	
5		Vamos desenhar a escala.	
6	Aluno B	A gente quer 27 vezes 12. O que a gente tem que fazer era pegar a soma de 27 mais 12 só que não é qualquer soma porque se eu achasse um 27 bem aqui.	
7		E um 12 bem aqui.	
8		Só que não, tem como somar elas só olhando, então a soma ela tem que ter alguma coisa que junte as 2.	
9		Então nesse caso tem que ser um dos pontos do compasso tem que ser em comum no caso seria esse aqui não é só somar se esse ponto teria que ser em comum com esse. Então tem que transpor essa	

		distância [12] que tá aqui pra cá.	

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

A ideia apresentada, no Quadro 21, foi elaborada após vários minutos de reflexão a respeito de como multiplicar usando a escala dos números. Nota-se que eles não associaram a manipulação da proporção contínua a uma multiplicação, em nenhum momento da atividade, o grupo retoma a ideia de proporção contínua sendo uma multiplicação.

Vale ressaltar que Gunter (1623) traz, em seu tratado, como fazer essa manipulação na sexta descrição de utilização da escala dos números, destinada a multiplicar um número pelo outro, todavia, esse excerto do documento não foi disponibilizado aos participantes, pois não era o foco da atividade.

Gunter (1623, p. 20, tradução nossa)[116] fornece um procedimento e um exemplo para multiplicar um número pelo outro:

> Estenda o compasso de 1 para o multiplicador; na mesma extensão aplicada da mesma maneira, deve chegar do multiplicando ao produto. Como se os números a serem multiplicados fossem 25 e 30: ou estenda os compassos de 1 para 25, e a mesma extensão dará a distância de 30 para 750; ou estenda-os de 1 para 30, e a mesma extensão deve atingir de 25 a 750.

Em outras palavras, para multiplicar dois números utilizando a escala, é necessário somar as suas respectivas distâncias logarítmicas, o procedimento justifica-se uma vez que ela é construída a partir de logaritmos. Essa foi a chave para o raciocínio do Aluno B, ao expor sua hipótese de como multiplicar a partir da manipulação da escala dos números.

Na fala apresentada na linha 1 do Quadro 21, tem-se: "eu vou primeiro usar propriedade de logaritmo que a gente não usou ainda acho que a única que gente não sou, uma das poucas que a gente não usou ainda. **Log de x mais log de y com mesma base é igual log de xy**" (ALUNO B, 2021).

Diante do expresso pelo Aluno B, ele indica que ainda não tinha sido utilizada a propriedade de multiplicação de logaritmos de mesma base: "Em qualquer base a ($0 < a \neq 1$), o logaritmo do produto de dois fatores reais positivos é igual à soma dos logaritmos dos fatores" (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2013, p. 63). No entanto, na tarefa três e quatro, eles mobilizaram esse saber, sendo uma das potencialidades elencada no capítulo quatro e que foi utilizada por eles, embora de maneira implícita.

[116] Lê-se no original: "Extend the Compasses from 1 to the Multiplicator; the same extent applied the same way, shall reach from the Multiplicand to the Product. As if the Numbers to be multiplied were 25 and 30: either extend the Compasses from 1 to 25, and the same extent will give the distance from 30 to 750; or extend them from 1 to 30, and the same extent shall reach from 25 to 750".

Assim, no destaque “**Log de x mais log de y com mesma base é igual log de xy**”, o Aluno B expressa seu entendimento quanto a essa propriedade, representando-a, como mostra a Figura 74, essa é a simbologia matemática adotada por ele para ilustrar a sua fala referente à propriedade de multiplicação de logaritmos de mesma base.

Figura 74 – Representação da propriedade do produto de logaritmos de base igual

$$\text{Log}^{x} + \text{Log}^{y} = \text{Log}^{xy}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Na linha 4, o discente justifica: “Porque como a gente quer uma multiplicação e ela é em logaritmo, a escala toda, **a gente quer a soma de 2 distâncias**” (ALUNO B, 2021). Então, devido à escala ser logarítmica, eles deveriam somar as distâncias dos números fornecidos para multiplicá-los.

Revela-se, nesse momento, uma questão epistemológica inerente à escala dos números, ao associar os logaritmos a distâncias, interligando a aritmética à geometria, algo que foi explorado no capítulo três desta pesquisa. No momento em que o pensamento do aluno entra em questão, associa-se ainda o saber algébrico a esse aspecto epistemológico da escala.

Com essa constatação, afigura-se uma relação dos logaritmos não como a definição expressa em livros didáticos, mas como a escala a molda para seu fim, como segmentos de reta, que incorporam as propriedades dos logaritmos em suas manipulações. Esse aspecto também foi apontado no capítulo quatro, acerca da visão diferenciada sobre os logaritmos por meio do estudo da escala dos números.

Em seguida, o Aluno B (2021) explica, a partir da linha 6, o procedimento para fazer isso utilizando a escala: “A gente quer 27 vezes 12. O que a gente tem que fazer era pegar a soma de 27 mais 12 só que não é qualquer soma porque se eu achasse um 27 bem aqui [ele representa seu discurso fazendo um desenho]”. O Aluno B considera, desse modo, o 27 para ser o multiplicador e estipula que a distância logarítmica correspondente a esse número, na escala, seja o segmento $\overline{AB}$, adaptado, na Figura 75, para melhor entendimento.

Figura 75 – Adaptação da representação matemática da distância do número 27

Fonte: Dados da pesquisa.

Para a representação da distância do número 12 como multiplicando, o discente diz: "E um 12 bem aqui [também desenha a representação do seu discurso]" (ALUNO B, 2021), associando-o ao segmento $\overline{CD}$, cuja adaptação é apresentada na Figura 76.

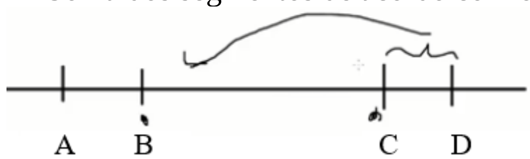
Figura 76 – Adaptação da representação matemática da distância do número 12

Fonte: Dados da pesquisa.

Ele segue a ideia de que é preciso ter algo que "junte" as duas distâncias. Sugere, então, que "[...] um dos pontos do compasso tem que ser em comum". Por fim, o discente acrescenta que "[...] tem que transpor essa distância [12] que tá aqui pra cá [a partir do ponto B]" (ALUNO B, 2021). Revela-se, nos dois trechos, que o meio semiótico da escrita complementa a fala do aluno, tornando-o um elemento importantíssimo para a explicação aos demais participantes do grupo.

A representação, para essa fala do Aluno B, foi adaptada, portanto, foi considerada a distância $\overline{AB}$ sendo a distância correspondente ao segmento 27 e a distância $\overline{CD}$, ao 12, desse modo, um dos pontos deve ser comum aos dois, assim, B = C (Figura 77).

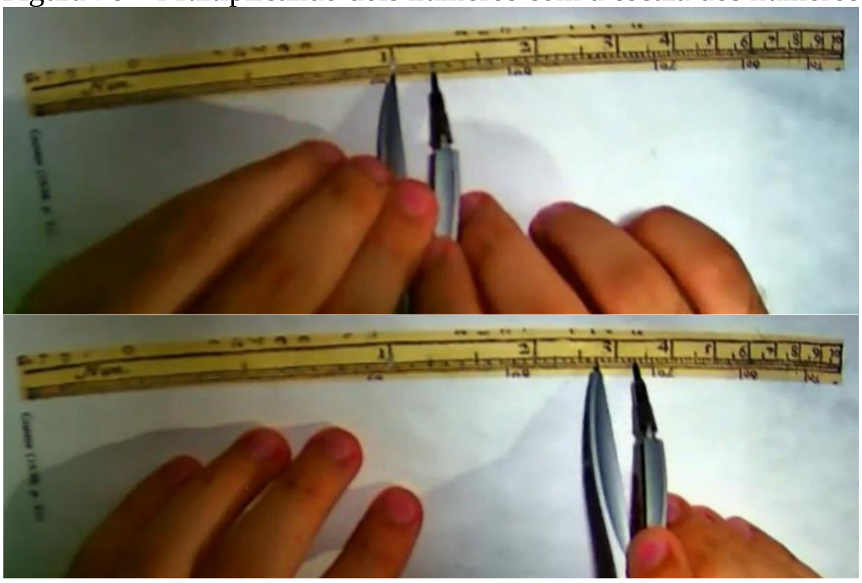
Figura 77 – Soma dos segmentos de acordo com o Aluno B



Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa perspectiva, o grupo concordou com a ideia do Aluno B e tentou manipular a escala para comprovar a hipótese por meio do manuseio. Primeiramente, eles consideraram o número 12 sendo o multiplicador e registraram a distância com o compasso do número 1 à marcação que representa o número 12, em seguida, colocaram a ponta seca do compasso no multiplicando 27 e obtiveram, como produto aproximado da multiplicação, o número 330 na escala, o procedimento pode ser observado na Figura 78.

Figura 78 – Multiplicando dois números com a escala dos números



Fonte: Dados da pesquisa.

Segundo a ideia do grupo em relação à resolução do problema, que requeria o lado do quadrado, eles tinham resolvido a primeira parte do questionamento, pois encontraram a área do terreno retangular. Agora, eles deveriam utilizar a média proporcional para obter o lado do quadrado.

Contudo, para encontrar a média proporcional, necessita-se de dois números para que se registre uma distância e, dessa forma, dividindo-a pela metade, encontre-se a média. Entretanto, o grupo um tinha somente um número, a área retangular correspondente a 330, eles precisaram formular ideias para encontrar o outro número necessário para obter a média desse número.

Logo, o grupo partiu da ideia de uma média aritmética (mais elementar) para o conceito de média geométrica (assunto mais elaborado), para que chegassem a uma conclusão de qual número utilizar na escala para encontrar o lado do quadrado. Esse momento da atividade foi transcrito no Quadro 22.

Quadro 22 – Elaborando ideias sobre média geométrica

Nº	Interlocutor	Discurso	Representação
1	Aluno B	Se a gente fizesse uma média, uma média aritmética mesmo normal da nossa matemática. A média entre um valor x e y.	
2		Como é a média entre x e y? Digam aí.	Média entre x e y
3	Aluna A	A soma dos dois dividido por 2.	

4	Aluno B	x mais y dividido por 2.	média entre x e y $M = \frac{x+y}{2}$
5		E se y fosse 0?	
6	Aluna A	Ficaria x mais 0 dividido por 2, ou seja, x dividido por 2.	média entre x e y $M = \frac{x+y}{2}$ $y = 0 \Rightarrow M = \frac{x}{2}$
7	Aluno B	Então quando se for uma média entre um número e zero é só o próprio número dividido por 2 né? (*Demais participantes concordam com a cabeça*)	
8		E se fosse uma **média geométrica** e não mais uma média aritmética entre x e y, como seria?	
9	Aluna A	Que no caso é a média proporcional?	
10	Aluno B	A gente tá falando da matemática de hoje da média geométrica entre x e y.	
11		É a raiz quadrada de x vezes y. É quadrada pois são só dois números, se tivesse um z seria raiz cúbica.	$y = 0 \Rightarrow M = \frac{x}{2}$ Média geo entre x e y $M_g = \sqrt[2]{x \cdot y}$
12		O que o zero tem de mais para isso resultar nisso? [ele está se referindo ao exemplo anterior]	
13	Aluna A	É porque a gente só fica com um valor.	
14	Aluno B	Mas o que o 0 tem de especial para ser exatamente ele quando soma ser o resultado o próprio x?	
15	Aluna A	Ele é neutro.	
16	Aluno B	Ele é o elemento neutro da adição.	

17		E aqui se eu fosse escolher um valor para o y, para acontecer a mesma coisa que lá [na média aritmética], pra ficar só um valor, deveria ser qual?	
18	Aluna A	1	
19	Aluno B	E ficaria como?	$\boxed{y=0} \Rightarrow M = \frac{x}{2}$ Média geo entre x e y $M_g = \sqrt[2]{x \cdot y} \Rightarrow y=1 \Rightarrow$
20	Aluna A	Raiz quadrada de x.	$\boxed{y=0} \Rightarrow M = \frac{x}{2}$ Média geo entre x e y $M_g = \sqrt[2]{x \cdot y} \Rightarrow y=1 \Rightarrow \sqrt[2]{x}$
21	Aluno B	Então a média geométrica entre qualquer número e 1 é a raiz desse número. Isso a gente tinha falado aqui nas outras aulas que a média proporcional ela usa a mesma técnica entre aspas do que a gente usa hoje como média geométrica aritmeticamente né? (*Os demais concordam*)	
22		É, mas então aqui a gente tem que fazer uma média proporcional. E a gente só tem um número né? Então qual que tem que ser o outro?	
23	Aluna A	Número 1?	
24	Aluno B	Isso. Então façam aí a média proporcional entre 1 e o valor que cai lá quando você faz a multiplicação.	

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

O Aluno B inicia sua representação com o conceito de média aritmética e busca interação com o grupo, fazendo perguntas para que todos possam compreender sua ideia. O primeiro questionamento surge para formular matematicamente a ideia específica de uma média aritmética entre x e y: "Como é a média entre x e y? Digam aí" (ALUNO B, 2021). A Aluna A responde de maneira objetiva, sem demora, que essa média é "a soma dos dois dividido por 2" (ALUNA A, 2021). Enquanto ela responde, o Aluno B faz a representação matemática da fala dela, mostrada na linha 4 do Quadro 22.

O discente, então, pergunta o que ocorreria se y fosse igual a 0. A Aluna A responde: "Ficaria x mais 0 dividido por 2, ou seja, x dividido por 2". Nesse momento, há um nó semiótico em que o Aluno B usa de artifícios básicos sobre média aritmética para mostrar, às colegas do grupo, que, se um dos números for zero, resta somente um número dividido por 2.

Posteriormente, na linha 8, o Aluno B (2021) introduz a concepção de média geométrica com o questionamento: "E se fosse uma **média geométrica** e não mais uma média aritmética entre x e y, como seria?", isso instiga o grupo a montar a ideia partindo da perspectiva feita com a média aritmética. Nessa conjuntura, ele delineia o mesmo cenário, são dados dois números e é preciso saber a média geométrica entre eles, logo, é preciso resolver a raiz quadrada de x multiplicado por y, segundo o Aluno B.

Em seguida, é questionado: "o que o zero tem de mais para isso resultar nisso?" (ALUNO B, 2021), referindo-se à média aritmética, quando y é zero resulta em x dividido por dois. A Aluna A responde, de maneira informal, que resta um valor. Entretanto, percebe-se, pela fala do Aluno B (2021): "Mas o que o 0 tem de especial para ser exatamente ele quando soma ser o resultado o próprio x?", que ele quer uma resposta formal para o nome atribuído ao número zero nessa ocasião, por isso, a Aluna A diz que o zero é neutro. Diante dessa resposta, o Aluno B complementa e diz que ele é elemento neutro da adição. Essa passagem é importante, pois o Aluno B considera necessário explicitar que o zero é o elemento neutro da adição, essa fala se justifica posteriormente.

Voltando para a média geométrica, é questionado: "E aqui se eu fosse escolher um valor para o y, para acontecer a mesma coisa que lá [na média aritmética], pra ficar só um valor, deveria ser qual?". A Aluna A responde que deveria ser escolhido o número 1, assim, resultaria na raiz quadrada de x, como ilustra a Figura 79.

Figura 79 – Representação matemática da simplificação da média geométrica

média entre x e y

$$m \quad \frac{x+y}{2}$$

$$y = 0 \Rightarrow m = \frac{x}{2}$$

média geo entre x e y

$$M_g = \sqrt[2]{x \cdot y} \rightarrow y = 1 \Rightarrow \sqrt[2]{x}$$

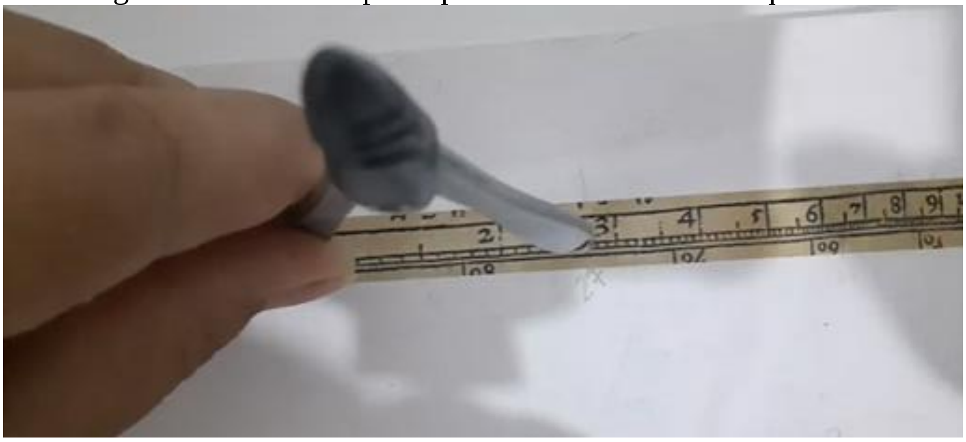
Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse momento, os discentes traçam um caminho que culmina na ideia de média aritmética, em algo objetivo que resolveria o empecilho deles ao manipular a escala. Dessa forma, para obter o lado do quadrado, é preciso encontrar a média geométrica de 1 e 330, em outras palavras, é necessário encontrar a raiz quadrada de 330.

Ressalta-se que, mesmo com a elaboração desse procedimento para obter a média proporcional de 1 e 330, nenhum dos discentes percebem, nessa ocasião, que isso recai como a raiz quadrada do produto de 27 e 12 e que o lado do quadrado também seria obtido se fosse feita a média proporcional entre esses números.

Em seguida, os discentes manipularam a escala para obter a média proporcional entre 1 e 330 e, dessa maneira, encontrar o lado correspondente ao quadrado de mesma área. Com os processos definidos, o grupo utilizou a escala para encontrar o produto de 27 multiplicado por 12 e para encontrar a média proporcional entre 1 e 330. O primeiro passo foi registrar com o compasso a distância correspondente ao número 27, colocando a ponta seca do compasso no 1 e a outra no 27, como mostra a Figura 80.

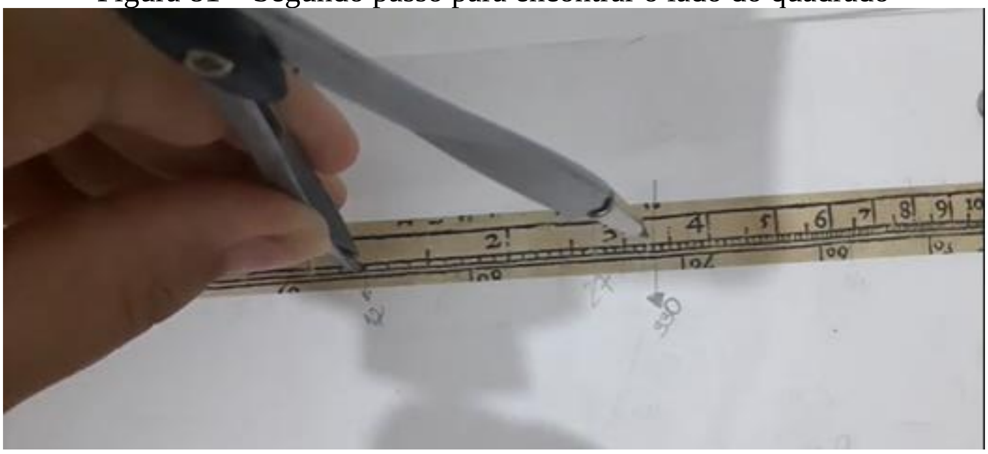
Figura 80 – Primeiro passo para encontrar o lado do quadrado



Fonte: Dados da pesquisa.

Com a mesma abertura registrada no compasso, a Aluna A posicionou a ponta seca na representação da marcação 12 na escala e, na outra ponta, observou-se o resultado da multiplicação sendo, aproximadamente, 330, como se expõe na Figura 81.

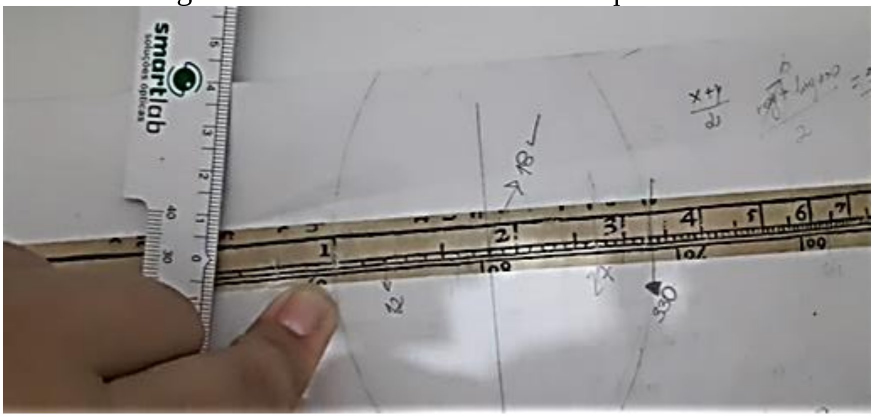
Figura 81 – Segundo passo para encontrar o lado do quadrado



Fonte: Dados da pesquisa.

Feita a multiplicação de 27 e 12, é necessário encontrar a média proporcional do produto 330, com o elemento neutro da multiplicação 1. Vê-se, na Figura 82, que a Aluna A traçou dois semicírculos e um segmento entre as interseções para encontrar o lado do terreno quadrangular correspondente a 18 jardas.

Figura 82 – Encontrando o lado do quadrado



Fonte: Dados da pesquisa.

Esse foi o procedimento utilizado pelo grupo um para encontrar o lado de um terreno quadrangular, tendo as dimensões de um terreno retangular de superfície semelhante. Eles mesclaram saberes acerca de área de quadriláteros, logaritmo, especialmente, a propriedade sobre produto, média aritmética e média geométrica, a fim de formular um processo para responder ao problema. Percebe-se que o grupo mobilizou diferentes conceitos para chegar a um mesmo fim, à média geométrica.

6.4.2 Concepções algébricas sobre o lado do quadrado

No encontro para retomar a tarefa seis e começar o problema dois, o Aluno B pediu para expor uma visão nova sobre como achar o lado do quadrado, uma vez que eles usaram bastantes artifícios para chegar a um procedimento acerca de como realizar a manipulação da escala e identificar quais saberes matemáticos precisavam ser mobilizados. Destarte, o Aluno B foi encorajado a mostrar sua nova ideia. Notsa-se, no Quadro 23, a explicação do discente.

Quadro 23 – Nova ideia acerca do lado do quadrado

Nº	Interlocutor	Discurso	Representação
1	Aluno B	Eu tava pensando **algebricamente** [Está se referindo ao problema anterior]	
2		Foi o que eu pensei. Como é de um quadrado, os lados têm que ser iguais. Então, para ser igual tem que acontecer alguma coisa.	

		(Expressão de confiança)	
3		O 12 tem que aumentar e o 27 tem que diminuir. Não sei mostrar porque isso tem que acontecer, mas é intuitivo.	
4		Pra chegar num valor igual, um tem que aumentar e o outro tem que diminuir.	
5		Esse aumentar seria multiplicado por um valor x.	$12 = 27$
6		E esse diminuir seria por outro valor, mas só que se fosse dividido pelo valor y, a gente não conseguia chegar à conclusão nenhuma. Então, eu coloquei para ser também dividido por x.	$12x = \frac{27}{x}$
7		Aí efetuando todas as continhas aqui ia ficar que x ao quadrado é igual a 27 sobre 12.	$12x = \frac{27}{x}$ $x^2 = \frac{27}{12}$
8		Mas como isso é uma distância não vou considerar o valor negativo [Em relação aos valores de x]. X vai ser só a raiz de 27 sobre 12	$12x = \frac{27}{x}$ $x^2 = \frac{27}{12}$ $x = \sqrt{\frac{27}{12}}$

9		Esse seria o valor de x. Tem como resolver essa raiz, dá um número racional, mas eu não vou resolver. Só vou substituir ali.	
10		Ia ficar que esse lado, qualquer um dos dois, tanto na divisão como na multiplicação, vou substituir na multiplicação. Vai ficar 12 vezes a raiz de 27 sobre 12.	$12x = \frac{27}{x}$ $x^2 = \frac{27}{12}$ $x = \sqrt{\frac{27}{12}}$ $12 \cdot \sqrt{\frac{27}{12}}$
11		Eu peguei o 12 e escrevi ele como sendo a raiz de 12 ao quadrado.	$12x = \frac{27}{x}$ $x^2 = \frac{27}{12}$ $x = \sqrt{\frac{27}{12}}$ $12 \cdot \sqrt{\frac{27}{12}}$ $\sqrt{12^2} \cdot \sqrt{\frac{27}{12}}$
12		Isso aqui é pela propriedade, como são duas raízes quadradas, posso escrever como uma só, que é 12 ao quadrado vezes 27 sobre 12.	$12x = \frac{27}{x}$ $x^2 = \frac{27}{12}$ $x = \sqrt{\frac{27}{12}}$ $12 \cdot \sqrt{\frac{27}{12}}$ $\sqrt{12^2} \cdot \sqrt{\frac{27}{12}}$ $\sqrt{12^2 \cdot \frac{27}{12}}$
13		Isso aqui é justamente a raiz de 12 vezes 27, por que tem um quadrado aqui e esse 12. **E isso aqui** [raiz de 12 vezes 27] **é exatamente a média proporcional ou a média geométrica entre 12 e 27.**	$12x = \frac{27}{x}$ $x^2 = \frac{27}{12}$ $x = \sqrt{\frac{27}{12}}$ $12 \cdot \sqrt{\frac{27}{12}}$ $\sqrt{12^2} \cdot \sqrt{\frac{27}{12}}$ $\sqrt{12^2 \cdot \frac{27}{12}} = \boxed{\sqrt{12 \cdot 27}}$

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

Com a exposição do Aluno B sobre outra forma de pensar sobre o lado do quadrado, nas circunstâncias dadas, percebem-se outros saberes matemáticos entrelaçados nesse processo, diferentes dos que foram mobilizados anteriormente. Emergiu, a partir do labor conjunto, uma nova maneira de pensar sobre o problema um da tarefa seis.

Já na primeira fala do Aluno B (2021): “Eu tava pensando **algebricamente**”, expõe-se que a explicação matemática que ele pensou segue um raciocínio algébrico, aspecto que ainda não tinha sido mencionado pelo grupo e que a tarefa seis proporcionou. O discente partiu da concepção geral de que o quadrado tem lados iguais e que sua área era semelhante à área de um terreno retangular. Assim, ele organizou o pensamento separando os lados do retângulo por uma igualdade, ilustrado pelo dizer: “Como é de um quadrado, os lados têm que ser iguais. Então, para ser igual tem que acontecer alguma coisa” (ALUNO B, 2021), que foi representado matematicamente por uma expressão, que seria manuseada posteriormente.

Logo, para que os lados sejam iguais, é indispensável que aconteça alguma manipulação matemática, o discente propôs:

> O 12 tem que aumentar e o 27 tem que diminuir. Não sei mostrar porque isso tem que acontecer, mas é intuitivo. Pra chegar num valor igual um tem que aumentar e o outro tem que diminuir. Esse aumentar seria multiplicado por um valor x. E esse diminuir seria por outro valor, mas só que se fosse dividido pelo valor y, a gente não conseguia chegar à conclusão nenhuma. Então, eu coloquei para ser também dividido por x (ALUNO B, 2021).

Diante dessa sugestão, multiplicar 12 por x e dividir 27 por x, tem-se a formulação de que, com esse procedimento, os lados do retângulo seriam modificados para que fosse encontrado o lado do quadrado. Nesse contexto, efetuando-se as operações necessárias, obtém-se uma equação do segundo grau, sobre a qual o discente justifica que só pode haver o valor positivo, dessa equação, tendo em vista que se procura um resultado correspondente a uma medida de comprimento. Portanto, observa-se, na Figura 83, o método matemático realizado até então.

Figura 83 – Equação do segundo grau resultante

$$12x = \frac{27}{x}$$

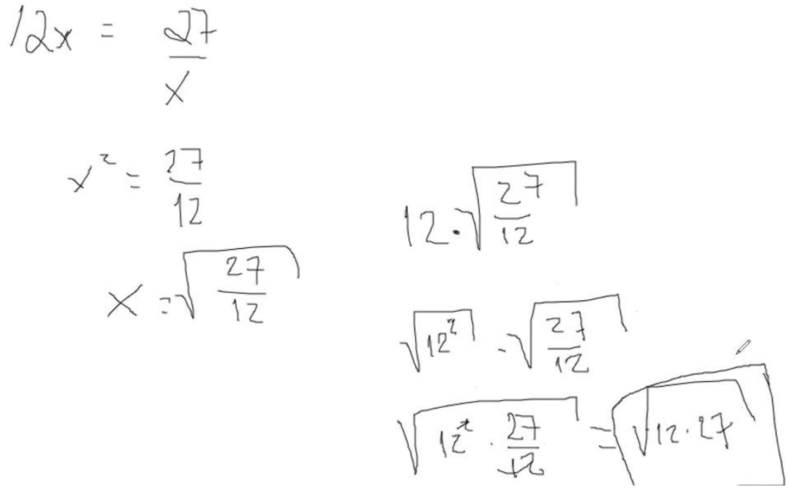
$$x^2 = \frac{27}{12}$$

$$x = \sqrt{\frac{27}{12}}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

À vista disso, o discente afirma que “esse seria o valor de x. Tem como resolver essa raiz, dá um número racional, mas eu não vou resolver. Só vou substituir ali. Ia ficar que esse lado, qualquer um dos dois, tanto na divisão como na multiplicação, vou substituir na multiplicação. Vai ficar 12 vezes a raiz de 27 sobre 12". Assim, ele substituiu o valor encontrado de x em um dos lados do quadrado, ele escolheu o lado da multiplicação de 12 por x. Em seguida, ele transformou o 12 em uma raiz de 12 ao quadrado, para que pudesse ser incluída na raiz de 27 sobre 12 e resultar, dessa forma, em raiz de 12 vezes 27, como se verifica nas manipulações matemáticas do Aluno B, na Figura 84.

Figura 84 – Achando o lado do quadrado



Fonte: Dados da pesquisa.

O Aluno B finaliza sua explanação concluindo: "[...] isso aqui [raiz de 12 vezes 27] é exatamente a média proporcional ou a **média geométrica entre 12 e 27**" (ALUNO B, 2021). Nessa ocasião, o Aluno B sintetiza as primeiras concepções, em que mobilizou saberes sobre média aritmética e logaritmo objetivamente, formulando uma contração semiótica do segmento exposto, no tópico anterior, de modo mais simples, sintetizado, direto.

Observam-se mais ideias associadas à média geométrica, culminando, nesse momento da tarefa seis, em uma concepção algébrica, que adveio do problema um e da manipulação da escala dos números em relação à média proporcional, como evidenciado na fala do Aluno B, apresentada anteriormente.

Os problemas dois e três dessa tarefa não serão analisados, uma vez que mobilizam ideias semelhantes às que já foram apresentadas neste capítulo, no que refere à média geométrica. Contudo, no último problema da tarefa seis, emergiram saberes que ainda não foram explorados, desse modo, a sessão, a seguir, apresenta os segmentos relevantes do problema quatro para a análise.

6.4.3 Sintetização matemática da média proporcional

Foram necessários dois encontros para resolver o último problema da tarefa seis, totalizando 4h/a, pois os alunos precisaram de mais tempo para formular uma resposta para a questão proposta, a saber: “O que é a média proporcional nesse contexto? Descrevam, em linguagem matemática, o manuseio da escala dos números para obter a média proporcional e escrevam possíveis fórmulas que matematizem essa manipulação”. A pergunta está relacionada a verificar-se como a média proporcional é definida no cenário de problematização da tarefa seis, mediante sua relação com a geometria.

Assim, foi pedido que os alunos sintetizassem os conceitos mobilizados no decorrer das tarefas cinco e seis, que abordavam a média proporcional e formulassem um processo que pudesse traduzir matematicamente a manipulação da escala dos números com a finalidade de encontrar uma média proporcional, dados dois números.

No primeiro encontro para resolver esse problema, o Aluno B, como de praxe, leu o problema quatro e o grupo formulou as primeiras concepções para resolvê-lo. O grupo um determinou a primeira estrutura matemática, que define o cenário de problematização da tarefa seis, na qual há dois tipos de terrenos, retangulares e quadrangulares de mesma área, em que é preciso encontrar o lado do quadrado e um lado do retângulo em outros casos. No Quadro 24, apresenta-se a primeira formulação matemática quanto a isso.

Quadro 24 – Definição da média proporcional no contexto da tarefa 6

Interlocutor	Discurso	Representação
Aluno B	Ela seria sempre o lado do quadrado, o lado 1 do retângulo e o lado 2 do retângulo. Sempre que a área do quadrado for o lado do quadrado for igual à área do retângulo que é L1 vezes L2 a média proporcional entre L1 e L2 é igual ao lado do quadrado. (*Expressão confiante e segurança na fala*)	$L_\square \quad L_1 \quad L_2$ $L_\square^2 = L_1 \cdot L_2$ $M(L_1, L_2) = L_\square$

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

Nesse segmento da tarefa, o grupo concorda em definir a média proporcional dos lados do retângulo como o lado do quadrado, associando a média proporcional a um aspecto geométrico, levando em conta os quadriláteros de mesma área. Portanto, o grupo um finalizou a primeira parte do problema, de contextualizar a média proporcional de acordo com o cenário da tarefa seis. Resta, agora, o grupo formular como a manipulação da média proporcional, na escala dos números, pode ser sintetizada matematicamente.

Essa parte da discussão rendeu muitas dúvidas e formulações, que não atendiam à finalidade da média proporcional. Mas um conceito foi utilizado e responsável por organizar as concepções matemáticas acerca da manipulação da escala dos números.

Foi pensado, pelo grupo um, que a manipulação propriamente dita sobre a construção geométrica, para achar o ponto médio de um segmento registrado na escala dos números, pudesse ser vista de outra forma, por intermédio da geometria analítica. Nesse sentido, formularam-se algumas vertentes de ideias.

A primeira foi considerar o conceito de equação do círculo em relação à geometria analítica, porque é necessário traçar, a partir da escala, dois círculos com centros nos números dados com um raio maior que a metade do segmento, para, assim, encontrar o ponto médio do segmento dado pelos números que se quer saber a média proporcional.

Desse modo, o Aluno B formulou duas equações do círculo, cada uma tendo centro nos números dados, mas, genericamente, considerou-se x e y, sendo x ≠ y e pertencentes à escala dos números. A Figura 85 mostra a ideia inicial baseada na geometria analítica.

Figura 85 – Ideia inicial a partir da geometria analítica

Linguagem matemática

Considere E o segmento de reta tq $\forall z$, $z \in E \Leftrightarrow z \in (1,10)$

Dados $x, y \in (1,10)$, com $x \neq y$, a média Proporcional $M_{(x,y)}$ é obtida a partir da interseção da mediatriz m com o segmento E.

Seja $C_1 = (p-x)^2 + q^2 = |x-y|^2$ e $C_2 = (p-y)^2 + q^2 = |x-y|^2$

Então, $m = C_1 \cap C_2$

Fonte: Dados da pesquisa.

Percebe-se que o grupo não se atentou às peculiaridades da escala nesse momento, uma vez que não consideraram os logaritmos para realizar os procedimentos matemáticos expostos na Figura 85. Nesse instante da tarefa, os discentes estavam se familiarizando com a ideia de formalizar matematicamente a manipulação da escala.

A partir das concepções iniciais formuladas com base na geometria analítica, eles foram capazes de sintetizar, no encontro seguinte, uma fórmula para o manuseio da escala dos números em relação à média proporcional. Eles perceberam o empecilho que os impediram de concluir a ideia utilizando a geometria analítica. No Quadro 25, apresenta-se o diálogo no qual há a constatação do problema na formulação matemática observada na Figura 85.

Quadro 25 – Percebendo o problema na sistematização matemática

Nº	Interlocutor	Discurso	Contexto
1	Aluno B	As duas primeiras né o que a média e escreva em linguagem matemática a gente já tinha concordado.	Faz referência ao apresentado no Quadro 24.
2		Agora a gente tinha que...	
3	Aluna C	Fazer a fórmula.	
4	Aluno B	Aí eu tinha feito aquele negócio da equação do círculo e a gente teve um problema e eu acho que não pode como eu fiz.	
5	Aluna A	**Linear** né?	O grupo não tinha considerado os logaritmos anteriormente.
6	Aluno B	Isso, a escala é **logarítmica**. (*Tom de voz de insatisfação. Expressão de frustração*)	
7	Aluna C	Como faremos isso, vamos só substituir naquela parte que tu colocou, em vez de colocar subtração colocar divisão?	
8	Aluno B	Vamos ver.	

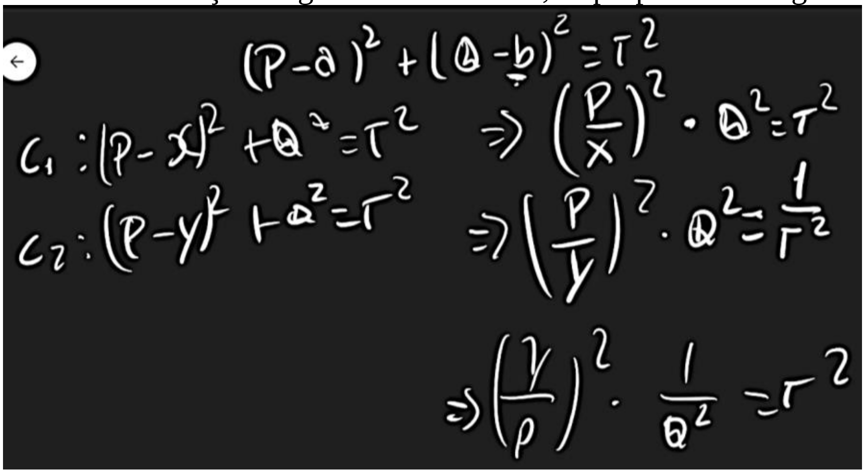
Fonte: Elaborado pela autora (2021).

O Aluno B retoma o problema quatro da tarefa seis, relendo-o e relembra que a primeira parte da questão já foi acordada pelo grupo. A Aluna C recorda que falta eles sintetizarem o manuseio da média proporcional em uma fórmula.

Dá-se início, a partir daí, a um processo de **iconicidade**, ao ser apontado, pela Aluna A, (2021) o problema da ideia anterior, ela fala “**Linear** né?”, sugerindo que o empecilho se encontra no fato de eles terem considerado a escala como linear, algo que Gunter (1623) esclarece na descrição da escala, que ela é dividida desigualmente, ou seja, construída por meio dos logaritmos. O excerto em que se localiza essa informação foi disponibilizado aos discentes na tarefa dois sobre a escala dos números, logo, essa ideia é retomada e tem grande importância no decorrer da resolução desse problema.

Mesmo sabendo do obstáculo que os impossibilitaram de prosseguir com a formulação, eles não chegaram rapidamente a uma conclusão para a formulação matemática do procedimento para encontrar a média proporcional, o último raciocínio sobre isso foi a formulação expressa na Figura 86.

Figura 86 – Formulação da geometria analítica, as propriedades logarítmicas



Fonte: Dados da pesquisa.

A primeira equação corresponde à equação do círculo, a qual é utilizada para representar o círculo C1 e C2, pois são necessárias as construções de dois círculos para encontrar a média proporcional, sendo x e y dados para isso. Percebe-se a utilização de duas propriedades dos logaritmos, da divisão e do produto.

Embora eles estivessem pensando em relação aos logaritmos, o grupo não conseguiu traçar uma fórmula ao final do segundo encontro dessa tarefa, então, o Aluno B, responsável por redigir o relatório, ficou encarregado de terminar o pensamento e enviar o relatório desse problema com alguma sistematização matemática.

Assim, a análise posterior diz respeito ao exposto no relatório do grupo um, no qual consta uma formalização matemática que partiu das ideias discutidas nos dois encontros sobre o problema quatro. No decorrer da resolução desse problema, os discentes se apropriaram da concepção de geometria analítica, especialmente, da equação do círculo e dos logaritmos, que é o conhecimento incorporado na escala, dessa maneira, conseguiram sintetizar matematicamente o manuseio da média proporcional. No relatório, visualiza-se um amadurecimento da concepção matemática sobre a média proporcional articulada pelo grupo anteriormente. No Quadro 26, apresenta-se a organização da escrita e da linguagem matemática associada.

Quadro 26 – Formalização da média proporcional disposta no relatório do grupo um

Nº	Interlocutor	Discurso	Representação
1	Aluno B	Antes, vamos definir a escala como um segmento de reta E.	

		Considere E um segmento de reta, tal que, para todo z, z pertence ao segmento E se, somente se, z está no intervalo (1, 10).	
2		Agora, consideremos dois círculos C1 e C2, com centros a e b respectivamente, pertencentes a escala e com o raio do primeiro círculo sendo igual a log b - log a e o raio do segundo igual a log a - log b.	$C_1: (\operatorname{Log} x - \operatorname{Log} a)^2 + (\operatorname{Log} y - \operatorname{Log} 1)^2 = (\operatorname{Log} b - \operatorname{Log} a)^2$ $= \operatorname{Log}^2 \frac{x}{a} + \operatorname{Log}^2 y = \operatorname{Log}^2 \frac{b}{a} \Rightarrow \operatorname{Log}^2 \frac{x}{a} \cdot y = \operatorname{Log}^2 \frac{b}{a} \Rightarrow$ $C_1: \frac{x}{a} \cdot y = \frac{b}{a}$ $C_2: (\operatorname{Log} x - \operatorname{Log} b)^2 + (\operatorname{Log} y - \operatorname{Log} 1)^2 = (\operatorname{Log} a - \operatorname{Log} b)^2 =$ $= \operatorname{Log}^2 \frac{x}{b} + \operatorname{Log}^2 y = \operatorname{Log}^2 \frac{a}{b} \Rightarrow \operatorname{Log}^2 \frac{x}{b} \cdot y = \operatorname{Log}^2 \frac{a}{b} \Rightarrow$ $\Rightarrow C_2: \frac{x}{b} \cdot y = \frac{a}{b}$
3		Portanto, a média proporcional M entre os dois pontos tomados a e b, representada por M (a, b), é definida como a interseção da mediatriz m de C1 e C2 com o segmento E. Sendo m = (x, ±y) = C1 ∩ C2, M (a, b) = x, quando y = 1, ou seja, quando a mediatriz intersecta o segmento E.	

4		Como sabemos que, sendo m = (x, ±y) = C1 ∩ C2, M (a, b), temos M (a, b) = x, quando y = 1, então basta calcular m.	$C_1 \cap C_2 : \begin{cases} \frac{x}{a}\cdot y = \frac{b}{a} \\ \frac{x}{b}\cdot y = \frac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a}\cdot y = \frac{b}{a} \quad (1) \\ \frac{b}{x}\cdot \frac{1}{y} = \frac{b}{a} \quad (2) \end{cases}$ Dividindo (1) por (2), temos $\frac{\frac{x}{a}}{\frac{b}{x}} \cdot \frac{y}{\frac{1}{y}} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a}\cdot\frac{x}{b}\cdot y \cdot y = 1 \Rightarrow (xy)^2 = ab \Rightarrow xy = \pm\sqrt{ab} \Rightarrow x = \frac{\pm\sqrt{ab}}{y}$ Logo, quando $y = 1$ (ou seja $m \cap E$), $x = \frac{\pm\sqrt{ab}}{1} = \pm\sqrt{ab}$ Portanto, $M(a,b) = x = \pm\sqrt{ab}$.

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

Diante do que foi posto, no Quadro 26, sobre a formalização do procedimento de obter a média proporcional de dois números com a escala dos números, evidencia-se um amadurecimento dos preceitos utilizados no decorrer das tarefas. Nesse segmento, o grupo um alcançou um maior nível de abstração no que se refere ao manuseio da escala para esse fim.

Revela-se uma evolução de feixe semiótico, no qual foram constituídas, a partir de diversas discussões compostas de representação matemática, falas, expressões e perspectivas matemáticas elementares, que possibilitaram uma formalização final do que foi proposto inicialmente.

Voltando-se para os aspectos matemáticos expostos no relatório, foi delimitado, antes de qualquer formulação matemática, um segmento de reta E, que representaria a escala dos números nessas condições, de tal forma que um número arbitrário z só pertence a esse segmento se ele estiver compreendido entre o intervalo de 1 a 10, o que faz alusão ao intervalo das marcações da escala. O grupo não especificou mais sobre esse aspecto da escala ser representada pelo segmento de reta E.

Dito isso, percebe-se que a equação do círculo foi considerada, mas com um sistema de coordenadas diferente do que eles estavam propondo anteriormente. No relatório, consta um sistema logaritmo que se aproxima da manipulação da escala, algo que o grupo não havia realizado até esse momento.

Por isso, formularam-se duas equações dos círculos, C1 e C2, indispensáveis para o processo de obter a média proporcional dos números dados a e b, correspondentes aos centros dos respectivos círculos e obedecendo ao que foi posto anteriormente, com a implementação dos logaritmos e das suas propriedades, em que o raio é compreendido como sendo log b – log a e log a – log b, nota-se, na Figura 87, a resolução da primeira parte do procedimento.

Figura 87 – Construção dos círculos

$$C_1: (\log x - \log a)^2 + (\log y - \log 1)^2 = (\log b - \log a)^2$$

$$= \log^2 \frac{x}{a} + \log^2 y = \log^2 \frac{b}{a} \Rightarrow \log^2 \frac{x}{a} \cdot y = \log^2 \frac{b}{a} \Rightarrow$$

$$C_1: \frac{x}{a} \cdot y = \frac{b}{a}$$

$$C_2: (\log x - \log b)^2 + (\log y - \log 1)^2 = (\log a - \log b)^2 =$$

$$= \log^2 \frac{x}{b} + \log^2 y = \log^2 \frac{a}{b} \Rightarrow \log^2 \frac{x}{b} \cdot y = \log^2 \frac{a}{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2: \frac{x}{b} \cdot y = \frac{a}{b}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Logo, a média é estipulada considerando a interseção de C1 e C2[117], que resulta em um segmento que vai interceptar o segmento de reta E no ponto x, com y igual a 1. Assim, é preciso resolver um sistema composto pelas equações resultantes de C1 e C2, como apresenta-se na Figura 88.

[117] A visualização da interseção desses círculos pode ser revista com clareza no capítulo três.

Figura 88 – Resolução do sistema de interseção de C1 e C2

$$C_1 \cap C_2 = \begin{cases} \frac{x}{a}\cdot y = \frac{b}{a} \\ \frac{x}{b}\cdot y = \frac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a}\cdot y = \frac{b}{a} & (1) \\ \frac{b}{x}\cdot \frac{1}{y} = \frac{b}{a} & (2) \end{cases}$$

Dividindo (1) por (2), temos

$$\frac{\frac{x}{a}}{\frac{b}{x}} \cdot \frac{y}{\frac{1}{y}} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a}\cdot\frac{x}{b}\cdot y \cdot y = 1 \Rightarrow (xy)^2 = ab$$
$$\Rightarrow xy = \pm\sqrt{ab}$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pm\sqrt{ab}}{y}$$

Logo, quando $y = 1$ (ou seja $m \cap E$), $x = \frac{\pm\sqrt{ab}}{1} = \pm\sqrt{ab}$

Portanto, $M(a,b) = x = \pm\sqrt{ab}$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Conclui-se a sistematização da média proporcional e finaliza-se a tarefa seis sobre esse assunto. Portanto, a tarefa sete não será analisada, como expresso anteriormente. Constatou-se, então, outro pensamento matemático, que emergiu da manipulação da escala dos números para obter uma média proporcional, outra forma de articular e de chegar à média geométrica, por meio da geometria analítica. A sessão, a seguir, apresenta, de forma sintética, as discussões dos resultados mediante a análise realizada.

6.5 Discussão dos resultados: as relações matemáticas estabelecidas com a média geométrica

Diante do objeto da atividade sobre desenvolver ideias sobre média geométrica, houve diferentes resultados ao se observar o retrospecto do labor conjunto, com vista na análise semiótica realizada. Foi possível perceber que os discentes, especialmente, os do grupo um, associaram diferentes conceitos matemáticos com a média geométrica para chegarem a ela, além de percepções a respeito do contexto de elaboração do saber matemático incorporado na escala dos números e na sua manipulação, para encontrar a média proporcional de dois números dados.

Ao avançar nos problemas em relação à média proporcional com a escala dos números, emergiram aspectos matemáticos que foram associados e outros que culminaram na média geométrica. No Quadro 27, é apresentado o resumo de como cada perspectiva matemática foi mobilizada.

Quadro 27 – Saberes articulados evidenciados na análise

Ação realizada	Saber mobilizado	Percepção historiográfica
Leitura do excerto sobre como manusear a escala dos números para encontrar a média proporcional de dois números.	Média Geométrica	
Divisão de um segmento de reta em duas partes iguais.	• Ponto médio de um segmento • Mediatriz	Os discentes se preocuparam em identificar se os saberes que eles estavam utilizando já estavam inseridos no contexto em que a escala foi desenvolvida.
Divisão de um segmento de reta em duas partes iguais a partir do saber incorporado na escala.	• Logaritmos • Propriedade de divisão de logaritmos • Propriedade de logaritmo da potência	
Encontrar o lado do quadrado conhecendo os lados de um retângulo de mesma área.	• Propriedade de multiplicação de logaritmos • Relação de aritmética e geometria ao constatar que multiplicar com a escala corresponde à soma de segmentos de reta • Associação de média aritmética e média geométrica • Relação da média geométrica a partir de um pensamento algébrico	Explicação dos discentes enfatizando que estavam pensando a partir da matemática moderna.
Sistematização matemática da manipulação da escala dos números para encontrar a média proporcional de dois números dados.	• Relação da geometria analítica, logaritmo e média geométrica	

Fonte: Elaborado pela autora (2021).

Os licenciandos do grupo um, que tiveram os dados coletados analisados diante das delimitações explicitadas anteriormente, mobilizaram diversos saberes matemáticos aliados à média geométrica e outros que culminaram nela. Ainda na leitura de como manusear a escala dos números em relação à média proporcional, eles já revisitaram o conceito de média geométrica, algo que não havia sido previsto ao se traçarem as possibilidades didáticas do instrumento. Vê-se que o excerto traz elementos matemáticos suficientes que podem promover o raciocínio para a média geométrica.

Em relação ao manuseio da escala dos números, propriamente dita, conceitos geométricos emergiram ao tentarem dividir um segmento de reta em duas partes iguais. Nesse sentido, os licenciandos retomaram os elementos matemáticos, que foram explorados na tarefa dois sobre os saberes incorporados na escala dos números, o que possibilitou que eles formulassem outra maneira de encontrar a metade do segmento de reta solicitado na manipulação da escala dos números em relação à média proporcional. Com isso, os discentes articularam saberes acerca de logaritmos para essa ação.

Partindo para os problemas contextualizados sobre média proporcional, percebeu-se que os discentes tiveram um raciocínio diferente do que foi planejado inicialmente e apresentado no capítulo quatro. De início, os discentes não remeteram o problema um da tarefa cinco, a respeito do lado do quadrado, à média proporcional diretamente. Desse modo, eles articularam outros saberes que os auxiliaram a chegar à resolução.

Primeiramente, os licenciandos revisitaram o saber inserido na escala dos números e manipularam elementos referentes aos logaritmos, em seguida, apoiaram-se em concepções de média aritmética para montar uma linha de pensamento, que culminou na média geométrica, conceito que eles associaram à média proporcional e conseguiram encontrar, com a escala, o valor requerido no problema.

Revela-se uma associação de, pelo menos, três conceitos matemáticos nesse momento, a saber: dos logaritmos, da média aritmética e da média geométrica. Dessa maneira, o problema proporcionou que os licenciandos retomassem aspectos matemáticos, que, normalmente, não são estudados, nem utilizados juntos, mas que foi preciso articulá-los para formular uma ideia para resolver o questionamento.

Outro aspecto matemático, que emergiu nessa ocasião, foi o pensamento algébrico em relação aos lados do retângulo e do quadrado de mesma área. A concepção, nessa vertente, culminou na média geométrica, essas noções não foram traçadas no capítulo quatro, todavia, emergiram, de forma efetiva, na resolução do problema mediante o labor conjunto. Assim, outro elemento matemático foi utilizado para resultar na média geométrica, que, comumente, não é explorado no ensino de Matemática.

Já na sistematização das ideias matemáticas movimentadas na atividade, especificamente, na tarefa seis, os discentes se apropriaram de concepções matemáticas distintas das vistas até o momento. Revelou-se o saber sobre geometria analítica aliada aos logaritmos, que findou, novamente, na média geométrica, contudo, por meio de outras formulações.

Outro aspecto, que foi percebido através da análise dos dados, foi o cuidado dos discentes em alguns momentos da atividade em não sobrepor a Matemática do passado com os saberes modernos que possuíam. Evidenciando um olhar mais criterioso em relação à história e aos recursos provenientes dela.

Portanto, constatou-se que a escala dos números é potencialmente didática para o ensino de Matemática, em particular, para o ensino de média geométrica, de maneira a movimentar não só esse conceito, mas outros que não são relacionados a ela, a saber: logaritmo, elementos geométricos e álgebra, embora exista essa possibilidade com o uso de um recurso histórico, como exposto neste estudo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A articulação da história com o ensino de Matemática tem ganhado espaço no âmbito das pesquisas que versam sobre esse aspecto. Nesse sentido, há várias maneiras pelas quais a história pode ser abordada na formação de professores, principalmente, considerando um recurso histórico potencialmente didático.

Destarte, escolheu-se, para este estudo, o tratado intitulado *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments…*, de autoria de Edmund Gunter, publicado em 1623. O tratado traz quatro instrumentos: Setor, *Cross-staff*, *Cross-bow* e Quadrante, dentre eles, foi selecionado o *Cross-staff*, especificamente, como objeto de pesquisa, a escala dos números inscrita no *staff* desse instrumento.

Diante da articulação entre história e ensino de Matemática, com base em uma construção de interface, com intermédio de um recurso histórico potencialmente didático, em particular, a escala dos números, formulou-se a seguinte pergunta norteadora da pesquisa: de que forma os saberes matemáticos envolvendo média geométrica emergem a partir do manuseio da escala dos números com licenciandos em Matemática?

Para tanto, foi realizado um estudo do tratado de Gunter, que aborda a escala dos números e seus usos, no qual se revelou o contexto de elaboração do documento e a episteme da época, que permitiu a visualização de potencialidades didáticas que pudessem ser mobilizadas mediante uma atividade construída com base na Teoria da Objetivação.

Para orientar os estudos, a fim de responder à questão de pesquisa, elaborou-se um objetivo geral: conhecer os processos matemáticos envolvendo a média geométrica, que permearam a formação de licenciandos em Matemática a partir do manuseio da escala dos números.

Nessa conjuntura, o primeiro objetivo específico era conhecer os aspectos contextuais, historiográficos e epistemológicos da elaboração do tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments*..., publicado em 1623, da escala dos números e dos seus saberes incorporados. O objetivo foi atingido por meio de uma metodologia baseada em uma pesquisa documental e bibliográfica, que possibilitou delinear aspectos contextuais e historiográficos da época na qual se desenvolveu o instrumento e o documento de estudo. Desse modo, o primeiro objetivo foi alcançado nos capítulos dois e três.

Com isso, foi constatado que, no período em que a escala e o tratado de Gunter (1623) foram elaborados, estava ocorrendo um florescimento das matemáticas práticas. Em Londres, no século XVII, por meio de incentivos do governo e de comerciantes abastados, ainda no reinado de Elizabeth I, diversos estudos voltados à prática matemática estavam em voga.

Foi, nesse cenário, que Gunter desenvolveu o estudo *The description and vse of the Sector, the Crosse-Staffe, and other instruments*..., que engloba a descrição e o uso do Setor, do *Cross-staff*, do *Cross-bow*, do Quadrante e traz uma inovação para os instrumentos do século XVII, as escalas das proporções em que está inserida a escala dos números. Diante do contexto apresentado, o panorama em que Gunter estava no século XVII, na Inglaterra, impulsionou os estudos relacionados à Matemática prática, acarretando na elaboração de tratados nessa vertente.

Já no que se refere ao estudo da episteme em que a escala dos números foi desenvolvida, perceberam-se saberes voltados para estudos de logaritmos, especificamente, o estudo disposto no tratado indicado por Gunter, denominado *Logarithmorum Chilias Prima*, de Henry Briggs, a respeito dos logaritmos decimais.

Assim, de acordo com os logaritmos dispostos nesse documento e de acordo com os usos da escala, constataram-se, também, saberes sobre as propriedades dos logaritmos. A partir disso, foi possível montar uma ideia sobre a construção e o manuseio da escala dos números, em que se destaca o conhecimento sobre logaritmos incorporado no instrumento.

Destaca-se que, no decorrer da pesquisa sobre os estudos acerca do contexto e da episteme desse período, revelaram-se dificuldades em encontrar pesquisas em português sobre esses aspectos e em escolher os documentos ideais para delinear o panorama adequado, que estava vinculado à elaboração do instrumento e do tratado, outra dificuldade emergiu na realização de uma escrita historiográfica atualizada.

O segundo objetivo específico era identificar as potencialidades didáticas relacionadas à construção e ao manuseio da escala dos números para o ensino de Matemática. Para lograr esse objetivo, utilizou-se como metodologia uma pesquisa de cunho bibliográfico, que foi atingido na sessão quatro desta pesquisa.

No estudo sobre as potencialidades didáticas da escala dos números, levando em consideração a descrição, a reconstrução e o manuseio da proporção contínua e da média proporcional, foram percebidas diversas potencialidades, como a possibilidade de articular conhecimentos sobre logaritmos e suas propriedades, geometria analítica, progressão geométrica, proporcionalidade, construções geométricas e média geométrica, é possível tanto mobilizar esses conhecimentos à parte como associados a outros, a depender da intencionalidade do professor e do objetivo da atividade a ser construída com base nessas possibilidades.

Foi evidenciado, no capítulo quatro, que a escala dos números é potencialmente didática para ser aliada ao ensino de Matemática em diversos assuntos. Observou-se, ainda, que a BNCC e os livros didáticos não relacionam os saberes que a escala dos números mobiliza, possibilitando ao professor reorganizar o ensino de modo a articular diferentes conhecimentos matemáticos.

As dificuldades encontradas, no decorrer dessa parte do estudo, concentraram-se, em particular, nas potencialidades destacadas, em que houve empecilho em descrevê-las de forma que pudessem ser compreendidas e, eventualmente, servirem como suporte para atividades didáticas.

O terceiro objetivo era criar uma atividade baseada na Teoria da Objetivação para o estudo de média geométrica, mediante a manipulação de média proporcional com a escala dos números. Desse modo, esse objetivo foi atingido na sessão cinco, em que se utilizaram, como metodologia, os pressupostos da TO para construção de uma atividade.

Portanto, foi criada uma atividade que teve como objetivo mobilizar saberes matemáticos incorporados na escala dos números a partir da sua manipulação para proporção contínua e média proporcional e, como objeto, traçou-se possibilitar que os discentes desenvolvam ideias sobre média geométrica. Assim, foram elaboradas sete tarefas com enfoque respectivamente: no contexto de elaboração do tratado, na escala dos números, na proporção contínua, na média proporcional e na formalização das ideias matemáticas mobilizadas durante a atividade.

O desafio em desenvolver essa parte do estudo se apresentou no entendimento da estrutura da atividade baseada na TO, no delineamento do seu objeto e objetivo, além da definição das tarefas para que elas atendessem ao que foi proposto para a atividade e para a pesquisa.

Por fim, o quarto objetivo específico era descrever, por meio de uma análise semiótica, os processos matemáticos vinculados à média geométrica proporcionados pelo manuseio da média proporcional com a escala dos números através da atividade construída com base na Teoria da Objetivação. Para isso, apropriou-se de uma abordagem qualitativa quanto aos dados e, para a análise, considerou-se a análise semiótica com preceitos baseados na TO.

Percebeu-se, com a análise semiótica dos dados coletados do grupo um, a respeito do primeiro problema da tarefa cinco e dos problemas um e quatro da tarefa seis, que, diante da aplicação da atividade, os licenciandos mobilizaram diversos saberes matemáticos em relação à média proporcional e à sua manipulação com a escala dos números.

Em especial, emergiram saberes sobre média geométrica aliada aos logaritmos, baseada nas propriedades logarítmicas e relacionada à álgebra e à geometria analítica. Essas ideias afloraram por meio de processos sobre os quais os discentes discutiram suas percepções e montaram coletivamente uma explicação matemática.

Constatou-se, ainda, que os discentes que participaram da formação levaram em conta, em todo o percurso da atividade, os logaritmos incorporados na escala, revelando a importância de reconhecer o saber inserido no instrumento histórico para a mobilização de conceitos matemáticos.

Além disso, foi atestada a preocupação dos discentes em se atentarem aos saberes que estavam em torno da construção da escala dos números, o que mostrou uma precaução em não se apropriar de conceitos matemáticos modernos e os sobrepor na época em que o instrumento foi desenvolvido.

Dessa maneira, a atividade proporcionou, aos licenciandos em Matemática, novas perspectivas em relação à média geométrica, que era o foco da pesquisa e em outros conceitos matemáticos e suas conexões, como saberes acerca de logaritmos e suas propriedades, construções geométricas e geometria analítica.

Logo, esta pesquisa contribuiu para a formação desses licenciandos em visualizar, na história, recursos didáticos que mobilizam saberes além do que está organizado no currículo, outro aspecto é a visão em relação à história que esses licenciandos apresentaram, deixando de lado o aspecto presentista de perceber a história. Para o âmbito do ensino de Matemática, este estudo deixa uma atividade que pode mobilizar diversos assuntos matemáticos, como os percebidos no capítulo quatro e os que emergiram na atividade explorada no capítulo seis, moldada a partir de um recurso proveniente da história, mas que pode ser modificada conforme a intencionalidade de quem a utilizar.

Há desfalques, nesta pesquisa, em relação ao estudo do contexto de elaboração do tratado de Gunter (1623); quanto a um aprofundamento no estudo epistemológico no que se refere às escalas das proporções e às suas potencialidades para o ensino; além da ausência de um estudo mais lapidado sobre a Teoria da Objetivação em suas nuances.

Para pesquisas futuras, almeja-se explorar o contexto de elaboração do tratado de Gunter (1623), enfatizando a comunidade de professores e os estudos que estavam circulando no Gresham College, nos primeiros 50 anos de seu funcionamento, haja vista que esse período é rico em produções sobre Matemática prática.

Outro aspecto a ser estudado é a questão epistemológica, que envolve as escalas do *Cross-staff*, uma vez que há uma razão para que cada uma seja inscrita em uma determinada parte do instrumento e um estudo sobre as demais manipulações da escala dos números e as outras escalas das proporções, as quais não tiveram destaque neste estudo. Pode-se, ainda, haver um aprofundamento quanto à utilização da Teoria da Objetivação no decorrer de toda a pesquisa, inclusive na análise dos dados, algo que não foi utilizado neste estudo.

Por essas lacunas que se apresentam na pesquisa, pretende-se dar continuidade a esse estudo em um doutorado, em vista de explorar as demais potencialidades didáticas da escala dos números e das demais escalas das proporções, que podem ser levadas à formação de professores e transformar a prática em sala de aula através da aliança com a história.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Leila Cunha de; GONTIJO, Cleyton Hércules. A complexidade da formação do professor de matemática e suas implicações para a prática docente. **Revista Espaço Pedagógico**, [S.L.], v. 20, n. 1, p. 76-87, 4 out. 2013. UPF Editora. http://dx.doi.org/10.5335/rep.2013.3508. Disponível em: https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/14022/1/ARTIGO_ComplexidadeForma%c3%a7%c3%a3oProfessor.pdf. Acesso em: 01 nov. 2020.

ALBUQUERQUE, Suziê Maria de. **Um estudo sobre a articulação entre a multiplicação contida no Traité de Gerbert (1843) e o ensino na formação de professores de matemática.** 2019. 145 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

ALFONSO-GOLDFARB, Ana Maria. 2. Centenário Simão Mathias: Documentos, Métodos e Identidade da História da Ciência. **Circumscribere: International Journal for the History of Science**, v. 4, p. 5-9, 2008. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/circumhc/article/view/679>. Acesso em: 20 ago. 2020

ALVES, Verusca Batista. PEREIRA, Ana Carolina Costa. O instrumento "círculos de proporção" exposto na obra de William Oughtred (1633): um elemento na interface entre história e ensino de matemática. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, São Paulo, v. 7, n. 2, p.89-108, 2018.

ALVES, Verusca Batista. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no manuseio do instrumento círculos de proporção de William Oughtred.** 2019. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

AMES-LEWIS, Francis. **Sir Thomas Gresham and Gresham College**: studies in the intellectual history of London in the sixteenth and seventeenth centuries. New York: Routledge, 2016.

ARZARELLO, Ferdinando *et al*. Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. **Educational Studies In Mathematics**, [S.L.], v. 70, n. 2, p. 97-109, 5 nov. 2008. Springer Science and Business Media LLC. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-008-9163-z.

ASH, Eric H.. **Power, Knowledge, and expertise in Elizabethan England**. [S.I.]: The Johns Hopkins University Press, 2004.

BAILEY, Nathan; GORDON, George; MILLER, Philip. **Dictionarium Britannicum, Or, A More Compleat Universal Etymological English Dictionary Than Any Extant**. London: T. Cox, 1736.

BATISTA, Antonia Naiara de Sousa. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso da balhestilha, inserida no documento Chronographia, Reportorio dos Tempos..., aplicado na formação de professores.** 2018. 114f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, 2018. Disponível em: <http://pgecm.fortaleza.ifce.edu.br/wp-

content/uploads/2018/11/Disserta%C3%A7%C3%A3o-Antonia-Naiara-de-Sousa-Batista.pdf>. Acesso em: 13 ago. 2020

BELTRAN, Maria Helena Roxo. História da Ciência e Ensino: Algumas considerações sobre a Construção de Interfaces. In: WITTER, G. P.; FUJIWARA, R. (Org.). **Ensino de Ciências e Matemática.** São Paulo: Ateliê Editoral, 2009.p. 179-208.

BELTRAN, Maria Helena Roxo; SAITO, Fumikazu; TRINDADE, Lais dos Santos Pinto. **História da Ciência para Formação de Professores.** São Paulo: Livraria da Física, 2014. (Temas em história da ciência).

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRIGGS, Henry. **Logarithmorum Chilias Prima**. London, 1617.

BRIGGS, Henry. **Arithmetica Logarithmica.** London: William Jones, 1628.

BROWN, John. **The use of the Line of Numbers, on a sliding (or glasiers) rule, in Arithmatique & Geometry**. London: W. G., 1662.

BROWN, John. **The description and use of the carpenters-rule:** together with the use of the line of numbers commonly called gunters-line. London: W. Fisher, 1688.

BURTON, Robert. **The Anatomy of Melancholy**: what it is, with all the kinds, causes, symptoms, prognostics, and several cures of it. Philadelphia: E. Claxton & Company, 1883.

CAMPBELL-KELLY, Martin *et al* (ed.). **The history of mathematical tables**: from sumer to spreadsheets. Oxford: Oxford University Press, 2003.

CHARTRES, Richard; VERMONT, David. **A brief history of Grasham College 1597-1997**. [S.I.]: Gresham College, 1998.

COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. **Planejando o trabalho em grupo**. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017. Tradução de: Luís Fernando Marques Dorvillé, Mila Molina Carneiro, Paula Márcia Schmaltz Ferreira Rozin.

CORMACK, Lesley B. Introduction: Practical Mathematics, Practical Mathematicians, and the Case for Transforming the Study of Nature. In: CORMACK, Lesley B.; WALTON, Steven A.; SCHUSTER, John A. (ed.). **Mathematical Practitioners and the Transformation of Natural Knowledge in Early Modern Europe**. 45. ed. Cham: Springer, 2017a. (Studies in History and Philosophy of Science).

CORMACK, Lesley B. Mathematics for Sale: Mathematical Practitioners, Instrument Makers, and Communities of Scholars in Sixteenth-Century London. In: CORMACK, Lesley B.; WALTON, Steven A.; SCHUSTER, John A. (ed.). **Mathematical Practitioners and the Transformation of Natural Knowledge in Early Modern Europe**. 45. ed. Cham: Springer, 2017b. (Studies in History and Philosophy of Science).

CORRY, Leo. Geometry and arithmetic in the medieval traditions of Euclid's Elements: a view from book ii. **Archive For History Of Exact Sciences**, [S.L.], v. 67, n. 6, p. 637-705, 18 jul. 2013. Springer Science and Business Media LLC. http://dx.doi.org/10.1007/s00407-013-0121-5.

COTTER, Charles H. Edmund Gunter (1581–1626). **Journal Of Navigation**, [S.L.], v. 34, n. 3, p. 363-367, set. 1981. Cambridge University Press (CUP). http://dx.doi.org/10.1017/s0373463300047998. Disponível em: https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-navigation/article/edmund-gunter-15811626/842FBA9BED16ABDA5B562A793C8036E7. Acesso em: 09 set. 2020.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa**: métodos qualitativos, quantitativos e mistos. Porto Alegre: Artmed, 2007.

CURTIS, George. **A treatise on Gunter's scale, and the sliding rule**. New York: E. Adams, 1824.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos**: função exponencial, função logarítmica e sequências. São Paulo: Editora Ática, 2020.

DEBUS, Allen George. **El hombre y la natureza en le renacimiento**. Mexico: Fondo de Cultura Económica, 1996.

DELAMAIN, Richard. **Grammelogia Or, the Mathematicall Ring**. London: John Haviland e Thomas Cotes, 1633.

DI BEO, Nara. **O estudo do *Trattato del Radio Latino*: Possíveis contribuições para a articulação entre História da Matemática e ensino**. 2015. Dissertação (mestrado). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PUCSP.

DIAS, Marisa da Silva; SAITO, Fumikazu. Algumas potencialidades didáticas do “setor trigonal” na interface entre história e ensino de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 4, p. 1227-1253, dez. 2014. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/22021. Acesso em: 20 jul. 2021.

DIGGES, Thomas. **Alae Seu Scalae Mathematicae**. London: Anno Domini, 1573.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011. Tradução de Hygino H. Domingues.

FEINGOLD, Mordechai. **The mathematicians' apprenticeship: science, universities and society in England, 1560-1640**. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.

FERRAZ, Márcia Helena Mendes; ALFONSO-GOLDFARB, Ana Maria; WAISSE, Silvia. Reflexões sobre a constituição de um corpo documental para a história da ciência: um estudo de caso do brasil colônia e brasil reino. Acervo - Revista do Arquivo Nacional, v. 26, n. 1, p. 42-53, 2013. Disponível em: http://hdl.handle.net/20.500.11959/brapci/40400. Acesso em: 17 jun. 2020.

FLETCHER, Steven J.. Numerical Modeling on the Sphere. **Data Assimilation For The Geosciences**, [S.I.], p. 483-554, 2017. Elsevier. http://dx.doi.org/10.1016/b978-0-12-804444-5.00012-x.

FOSTER, Samuel. **The Workes of Edmund Gunter**. 3. ed. London: F. N., 1653.

FRISIUS, Rainer Gemma. **De Radio Astronomico et Geometrico liber.** [S.I.]: Greg. Bontius, 1545.

GUNTER, Edmund. **Canon triangvlorvm**. London: William Jones, 1620.

GUNTER, Edmund. **The Description and use of the sector. The Crosse-staffe and other instruments, For such as are studious of Mathematicall practise**. London: William Jones, 1623.

GUNTER, Edmund. **The Description and Use of His Majesties Dials in White-Hall Garden**. London: B. Norton And J. Bill., 1624a.

GUNTER, Edmund. **The Description and use of the sector. The Crosse-staffe and other instruments. For such as are studious of Mathematicall practise**. London: William Jones, 1624b.

GUNTER, Edmund. **The description and vse of the sector, crosse-staffe, and other instruments**: with canon of artificiall sines and tangents, to a radius of 10000.000. parts, and the vse there of in astronomie, navigation, dialling, and fortification, etc. London: William Jones, 1636.

HACKETT, Maria. **A brief memoir of sir Thomas Gresham; with an abstract of his Will, and of the act of parliament, for the foundation and government of Gresham College**. London: J. F. And G. Rivington, St. Paul'S Churchyard; And Smith, Elder And Co., Cornhill, 1833.

HACKMANN, Willem. Mathematical instruments. In: FAUVEL, John; FLOOD, Raymond; WILSON, Robin (ed.). **Oxford Figures**: eight centuries of the mathematical sciences. 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 2013. Cap. 3. p. 75-90.

HARKNESS, Deborah E. **The Jewel House:** Elizabethan London and the Scientific Revolution. London: Yale University Press, 2007.

HARTLEY, Harold; HINSHELWOOD, Cyril. Gresham College and the Royal Society. **Notes And Records Of The Royal Society Of London**, [S.L.], v. 16, n. 1, p. 125-135, 30 abr. 1961. The Royal Society. http://dx.doi.org/10.1098/rsnr.1961.0031. Disponível em: https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsnr.1978.0001. Acesso em: 09 set. 2020.

HAVIL, Julian. **John Napier**: life, logarithms, and legacy. Princeton: Princeton University Press, 2014.

HIGTON, Hester Katharine. **Elias Allen and the Role of Instruments in Shaping the Mathematical Culture of Seventeentli-Century England**. 1996. 329 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doctor Of Philosophy (phd), Department Of The History And Philosophy Of

Science, University Of Cambridge, Cambridge, 1996. Disponível em: https://doi.org/10.17863/CAM.16170. Acesso em: 31 maio 2020.

HIGTON, Hester Katharine. Instruments and Illustration. **Early Science And Medicine**, [S.L.], v. 18, n. 1-2, p. 180-200, 2013. Brill. http://dx.doi.org/10.1163/15733823-0007a0007.

HOOD, Thomas. **The making and vse of the Geometricall Instrument, called a Sector**. London: John Windet, 1598.

HOOD, Thomas. **The use of the Two Mathematicall Instruments, the Crosse-Staffe (differing from that in common use with the mariners:) And the Jacobs Staffe**: set forth dialogue wise in two treatises: the one most commodious for the mariner, the other profitable for the surveyor to take the length, height, depth or breadth of anything measurabl. London: Richard Field, 1595.

HUDSON, Douglas Rennie. An Old Mathematical Instrument—The Sector. **American Journal Of Physics**, [s.l.], v. 14, n. 5, p. 332-336, set. 1946. American Association of Physics Teachers (AAPT). http://dx.doi.org/10.1119/1.1990856. Disponível em: https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.1990856. Acesso em: 30 abr. 2020.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar, 2**: logaritmos. 10. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 4**: sequências, matrizes, determinantes e sistemas. São Paulo: Atual, 2013a.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 11**: matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva. São Paulo: Atual, 2013b.

JOHNSON, Francis R. Gresham College: precursor of the royal society. **Journal Of The History Of Ideas**, [S.L.], v. 1, n. 4, p. 413-438, out. 1940. JSTOR. http://dx.doi.org/10.2307/2707123.

JOHNSTON, Stephen. **The identity of the mathematical practitioner in 16th – century England**. 1995. Disponível em: http://www.mhs.ox.ac.uk/staff/saj/texts/mathematicus.htm Acesso em: 08 de set. 2020.

KRIPKA, Rosana Maria Luvezute; SCHELLER, Morgana; BONOTTO, Danusa de Lara. La investigación documental sobre la investigación cualitativa: conceptos y caracterización.. **Revista de Investigaciones Unad**, [s.l.], v. 14, n. 2, p. 55, 24 nov. 2015. Universidad Nacional Abierta y a Distancia. http://dx.doi.org/10.22490/25391887.1455. Disponível em: https://doi.org/10.22490/25391887.1455. Acesso em: 11 jun. 2020.

LEYBOUN, William. **The works of that famous mathematician Mr. Edmund Gunter**. London: A. C., 1673.

MARTIN, George R. R. **As Crônicas de Gelo e Fogo: a Guerra dos Tronos**. São Paulo: Leya, 2010.

MARTINS, Eugeniano Brito. **Conhecimentos matemáticos mobilizados na manipulação das barras de calcular de John Napier descritas no tratado Rabdologiae de 1617**. 2019. 104 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal do Ceará, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza, 2019. Disponível em: http://pgecm.fortaleza.ifce.edu.br/dissertacoes-2018/. Acesso em: 13 ago. 2020.

MCKIE, Douglas. The origins and foundation of the Royal Society of London. **Notes And Records Of The Royal Society Of London**, [S.L.], v. 15, n. 1, p. 1-37, 31 jul. 1960. The Royal Society. http://dx.doi.org/10.1098/rsnr.1960.0001. Disponível em: https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsnr.1960.0001. Acesso em: 24 ago. 2020.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. 200 p. (Tendências em Educação Matemática, 10).

MORETTI, Vanessa Dias; PANOSSIAN, Maria Lúcia; RADFORD, Luis. Entrevista Luis Radford: Questões em torno da Teoria da Objetivação. **Obutchénie**: R. de Didat. E Psic. Pedag, Uberlândia, v. 2, n. 1, p. 230-251, abr. 2018. Disponível em: http://www.seer.ufu.br/index.php/Obutchenie/article/view/42548. Acesso em: 19 ago. 2019.

MOREY, Bernadete. Abordagem semiótica na Teoria da Objetivação. In: GOBARA, Shirley Takeco; RADFORD, Luis (org.). **Teoria da Objetivação**: fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2020. p. 43-68.

NANGONOVÁ, Stella. **British history and culture**. Ostrava, 2008.

NICHOLSON, William. **The British Encyclopedia: Or, Dictionary of Arts and Sciences. Comprising an Accurate and Popular View of the Present Improved State of Human Knowledge**. London: C. Whittingham, 1809.

OLIVEIRA, Francisco Wagner Soares. **Sobre os conhecimentos geométricos incorporados na construção e no uso do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes (1502-1578) na formação do professor de matemática.** 2019. 200f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

OUGHTRED, William. **The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment.** London: Augustine Mathewes, 1633.

OUGHTRED, William. **To the English gentrie, and all others studious of the mathematicks which shall bee readers hereof. The just apologie of Wil: Oughtred, against the slaunderous insimulations of Richard Delamain, in a pamphlet called Grammelogia, or the mathematicall ring, or mirisica logarithmorum projectio circularis.** London: A. Mathewes, 1632.

PAIVA, Jussara Patrícia Andrade Alves. **A teoria da objetivação e o desenvolvimento da orientação espacial no ensino-aprendizagem de geometria**. 2019. 209 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciência e Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.

PARKER, J. **St. Clement's church. Taken down in the year 1829. F. Mackenzie del. Henry Le Keux sculp. The Oxford almanack for the year of our lord God MDCCCXXXVII**. 1836. Disponível em: https://wellcomecollection.org/works/wfqr5xzy. Acesso em: 13 mar. 2021.

PATARO, Patricia Moreno; BALESTRI, Rodrigo. **Matemática essencial 7° ano**: ensino fundamental, anos finais. São Paulo: Scipione, 2018a.

PATARO, Patricia Moreno; BALESTRI, Rodrigo. **Matemática essencial 8° ano**: ensino fundamental, anos finais. São Paulo: Scipione, 2018b.

PATERSON, Daniel. **Paterson's British Itinerary, being a new and accurate delineation and description of the direct and principal cross Roads of Great Britain**. 1785. Disponível em: https://www.bl.uk/collection-items/patersons-british-itinerary. Acesso em: 27 abr. 2017.

PEIRCE, Charles Sanders. **Semiótica**. São Paulo: Perspectiva, 2005. Tradução de: José Teixeira Coelho Neto.

PEPPER, Jon V. Edmund Gunter. In: GILLISPIE, Charles Coulston (ed.). **Dictionary of Scientific Biography**, volume 5, pages 593–594. New York: Charles Scribner's Sons, 198.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. **Aspectos Históricos da régua de cálculo para a construção de conceitos matemáticos**. São Paulo: Livraria da Física, 2015. (História da Matemática para o Ensino).

PEREIRA, Ana Carolina Costa. **Aspectos Históricos da régua de cálculo para a construção de conceitos matemáticos**. São Paulo: Livraria da Física, 2015. (História da Matemática para o Ensino).

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SAITO, Fumikazu. A reconstrução do Báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. **Revista Cocar**, [s.l.], v. 13, n. 25, p. 342-372, fev. 2019a. Universidade do Estado do Para. http://dx.doi.org/10.31792/rc.v13i25. Disponível em: https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/2164. Acesso em: 20 maio 2019.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SAITO, Fumikazu. Os conceitos de perpendicularidade e de paralelismo mobilizados em uma atividade com o uso do báculo (1636) de Petrus RamusThe concept of perpendicularity and parallelism mobilized in an activity with the use of the baculum (1636) of Petrus Ramus. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, [S.L.], v. 21, n. 1, p. 405-432, 29 abr. 2019b. Portal de Revistas PUC SP. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i1p405-432.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SAITO, Fumikazu. Os instrumentos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática: compreendendo o cenário nacional nos últimos 10 anos. IN: SEMINÁRIO CEARENSE DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 3., 2018, Fortaleza. **Anais.** Fortaleza: Eduece, 2018. p. 1 - 12.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; SAITO, Fumikazu. OS INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS NA INTERFACE ENTRE HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA: COMPREENDENDO O CENÁRIO NACIONAL NOS ÚLTIMOS 10 ANOS. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 5, n. 14, p.109-122, ago. 2018. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/225>. Acesso em: 31 mar. 2019.

POELJE, Otto Van. Gunter Rules in Navigation, **Journal of the Oughtred Society**, [S.I.], p.11-22, 2004.

PRESMEG, Norma *et al*. **Semiotics in Theory and Practice in Mathematics Education**. Cham: Springer, 2016.

QUEIROZ, T. A. P. de. Aprender a saber na Idade Média (Capítulo 1**)**. In: **Trivium e quadrivium: as artes liberais na Idade Média.** Cotia: Ibis, 1999, p. 11-31.

RADFORD, L. ¿Cómo sería una actividad de enseñanza-aprendizaje que busca ser emancipadora? La labor conjunta en la teoría de la objetivación. **RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa**, v. 5, n. 2, p. 15-31, 2020b.

RADFORD, L. El aprendizaje visto como saber y devenir: una mirada desde la teoría de la objetivación. **REMATEC**, v. 15, n. 36, p. 27-42, 22 dez. 2020a.

RADFORD, L. *et al*. Calculators, graphs, gestures, and the production meaning. In: PATEMAN, N.; DOUGHERTY, B.; ZILLIOX, J. (ed.). **Anais 27 Conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME27 –PMENA25)**, v.4, p. 55-62, 2003.

RADFORD, L. On culture and mind. A post-Vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought. In: ANDERSON, M.; SÁENZ-LUDLOW, A.; ZELLWEGER, S.; CIFARELLI, V. (Ed.). **Educational perspectives on mathematics as semiosis**: From thinking to interpreting to knowing. Ottawa: Legas Publishing, 2003. p. 49-79.

RADFORD, L. Saber, aprendizaje y subjetivación en la Teoría de la Objetivación. **Anais do 5° Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática: 5º SIPEMAT**. Belém, p. 1-22, 2018c.

RADFORD, L. **The Ethic of Semiosis and the Classroom constitutions of Mathematics subjects**. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

RADFORD, L. The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In: RADFORD, L.; SCHUBRING, G.; F. SEEGER (Eds.), **Semiotics in mathematics education**: epistemology, history, classroom, and culture. Rotterdam: Sense Publishers. 2008a, p. 215-234.

RADFORD, L. **The Theory of Objectification**: a vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning. [S.I.]: Brill, 2021.

RADFORD, L.; SABENA, C. The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach. In: BIKNER-AHSBAHS, A.; KNIPPING, C.; PRESMEG, N. (Ed.). Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. New York: Springer, p. 157-182, 2015.

RADFORD, Luis. “No! He starts walking backwards!”: interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. **Zdm**, [S.L.], v. 41, n. 4, p. 467-480, 18 abr. 2009. Springer Science and Business Media LLC. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-009-0173-9.

RADFORD, Luis. A Teoria da Objetivação e seu lugar na pesquisa sociocultural em Educação Matemática. In: Vanessa, MORETTI; Wellington, CEDRO. **Educação Matemática e a Teoria Histórico-Cultural**: Um olhar sobre as pesquisas. Campinas: Mercado de Letras, p. 229-261, 2018a.

RADFORD, Luis. Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la Teoría de la Objetivación. **Pna**, Granada, v. 12, n. 2, p. 61-80, jan. 2018b. Disponível em: https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6965. Acesso em: 21 set. 2021.

RADFORD, Luis. Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. **Zdm**, [S.L.], v. 40, n. 1, p. 83-96, 5 dez. 2008b. Springer Science and Business Media LLC. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0.

RADFORD, Luis. Methodological Aspects of the Theory of Objectification. **Perspectivas da Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v. 18, n. 8, p. 547-567, dez. 2015. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/1463. Acesso em: 20 abr. 2021.

RADFORD, Luis. Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. In: D'AMORE, B.; RADFORD, L. **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos. Bogotá: Ud Editorial, 2017. Cap. 4. p. 97-114. Disponível em: <http://www.luisradford.ca/pub/2017%20-%20D%20Amore%20_%20Radford%20-%20ensenanza%20aprendizaje%20de%20las%20matematicas.pdf>. Acesso em: 09 fev. 2020.

RADFORD, Luis. **The Theory of Objectification**: a vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning. [S.I.]: Brill, 2021.

RECORDE, Robert. **The grovnd of arts**. London: I. B., 1618.

RICE, Brian; GONZÁLEZ-VELASCO, Enrique; CORRIGAN, Alexander. **The Life and Works of John Napier**. Cham: Springer, 2017.

ROBERTSON, John. XIII. The construction of the logarithmic lines on the Gunter’s scale. **Philosophical Transactions Of The Royal Society Of London**, [S.L.], v. 48, p. 96-103, 31 dez. 1753. The Royal Society. http://dx.doi.org/10.1098/rstl.1753.0014. Disponível em: https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstl.1753.0014. Acesso em: 24 ago. 2020.

ROCHE, John J.. The radius astronomicus in England. **Annals Of Science**, [S.L.], v. 38, n. 1, p. 1-32, jan. 1981. Informa UK Limited. http://dx.doi.org/10.1080/00033798100200101. Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00033798100200101. Acesso em: 20 out. 2020.

ROEGEL, Denis. A reconstruction of Gunter's Canon triangulorum (1620). **Hal-Inria**, [S.I.], p. 1-107, dez. 2010.

ROEGEL, Denis. A reconstruction of the tables of Briggs' Arithmetica logarithmica (1624). **Hal-Inria**, [S.I.], p. 3-334, 11 jan. 2011.

ROSS, Richard P.. The Social and Economic Causes of the Revolution in the Mathematical Sciences in Mid-Seventeenth-Century England. **Journal Of British Studies**, [S.L.], v. 15, n. 1, p. 46-66, 1975. Cambridge University Press (CUP). http://dx.doi.org/10.1086/385678.

SAITO, Fumikazu. CONSTRUINDO INTERFACES ENTRE HISTÓRIA E ENSINO DA MATEMÁTICA. **Ensino de Matemática em Debate**, São Paulo, p.3-19, 2016. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/29002>. Acesso em: 15 ago. 2018.

SAITO, Fumikazu. **História da matemática e suas (re) construções contextuais**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

SAITO, Fumikazu. História e Ensino de Matemática: construindo interfaces. In: SALAZAR, Jesús Flores; GUERRA, Francisco Ugarte (ed.). **Investigaciones en Educacion Matemática**. Lima: Fondo Editorial Pucp, 2016b. p. 253-291.

SAITO, Fumikazu. Número e grandeza: discutindo sobre a noção de medida por meio de um instrumento matemático do século xvi. **Ciência & Educação (Bauru)**, [S.L.], v. 23, n. 4, p. 917-940, dez. 2017. FapUNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/1516-731320170040012. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ciedu/a/jnzrrSrWC9nJjmP7JfyKHDj/?lang=pt. Acesso em: 05 set. 2021.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. Interface entre História da Matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação**, v.19, no1, p. 89-111, 2013.

SANGWIN, Christopher J. Edmund Gunter and the Sector. **University Of Birmingham**, [S.I.], p. 1-6, jan. 2003.

SANTOS, Andressa Gomes dos; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Questões didáticas envolvendo as escalas do Cross-staff (1623) elaborado por Edmund Gunter. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, São Paulo, v. 10, n. 1/2, p. 105-118, out. 2021. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/pdemat/article/view/55019. Acesso em: 05 out. 2021.

SILVA, Mariana Freitas Tacanho da. **Médias, Desigualdade das Médias e a Resolução de Problemas**. 2019. 105 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2019.

SILVA, Isabelle Coelho da; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Definições e Critérios para o Uso de Textos Originais na Articulação entre História e Ensino de Matemática. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, [S.L.], v. 35, n. 69, p. 223-241, jan. 2021. FapUNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a11. Disponível em:

https://www.scielo.br/j/bolema/a/GKJzc6LWtwPNkz8d98cvyGG/abstract/?lang=en. Acesso em: 19 abr. 2021.

STATER, Victor. **The political history of Tudor and Stuart England**: A Sourcebook. London: Routledge, 2002.

TAYLOR, Eva Germaine Rimington. **The mathematical practitioners of Tudor and Stuart England**. Cambridge: At The University Press, 1968.

TEIXEIRA, Lilian Aparecida (org.). **Diálogo**: matemática e suas tecnologias. São Paulo: Moderna, 2020.

VAN POELJE, Otto E. The Navigation Scale, Improved by B. Donn. **Journal of the Oughtred Society**, v. 14, p. 36-42, 2005.

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

WARD, John. **The lives of the professors of Gresham College**: to which is prefixed the life of the founder, sir Thomas Gresham. London: John Moore, 1740.

WILSON, Effingham. **Wilson's Description of the New Royal Exchange, Including an Historical Notice of the Former Edifices; And a Brief Memoir of Sir Thomas Gresham, Knt., Founder of the Original Burse in the Reign of Queen Elizabeth**. London: Effingham Wilson, 1844.

WINGATE, Edmund. **L'vsage de la reigle de proportion**. Paris: Harlay, 1624.

APÊNDICE A – CARTÃO DE RECURSO 1

Estudo sobre o contexto de elaboração do tratado

CARTÃO DE RECURSO 01

Em uma aula da disciplina de História da Matemática, na Universidade Estadual do Ceará, sobre as matemáticas do século XVII, foi apresentado, aos discentes, que esse período foi marcado por uma grande ascensão de conhecimentos matemáticos voltados às práticas[118]. Naquele período, diversos instrumentos foram difundidos na Europa e muitos tratados matemáticos foram elaborados com esse foco.

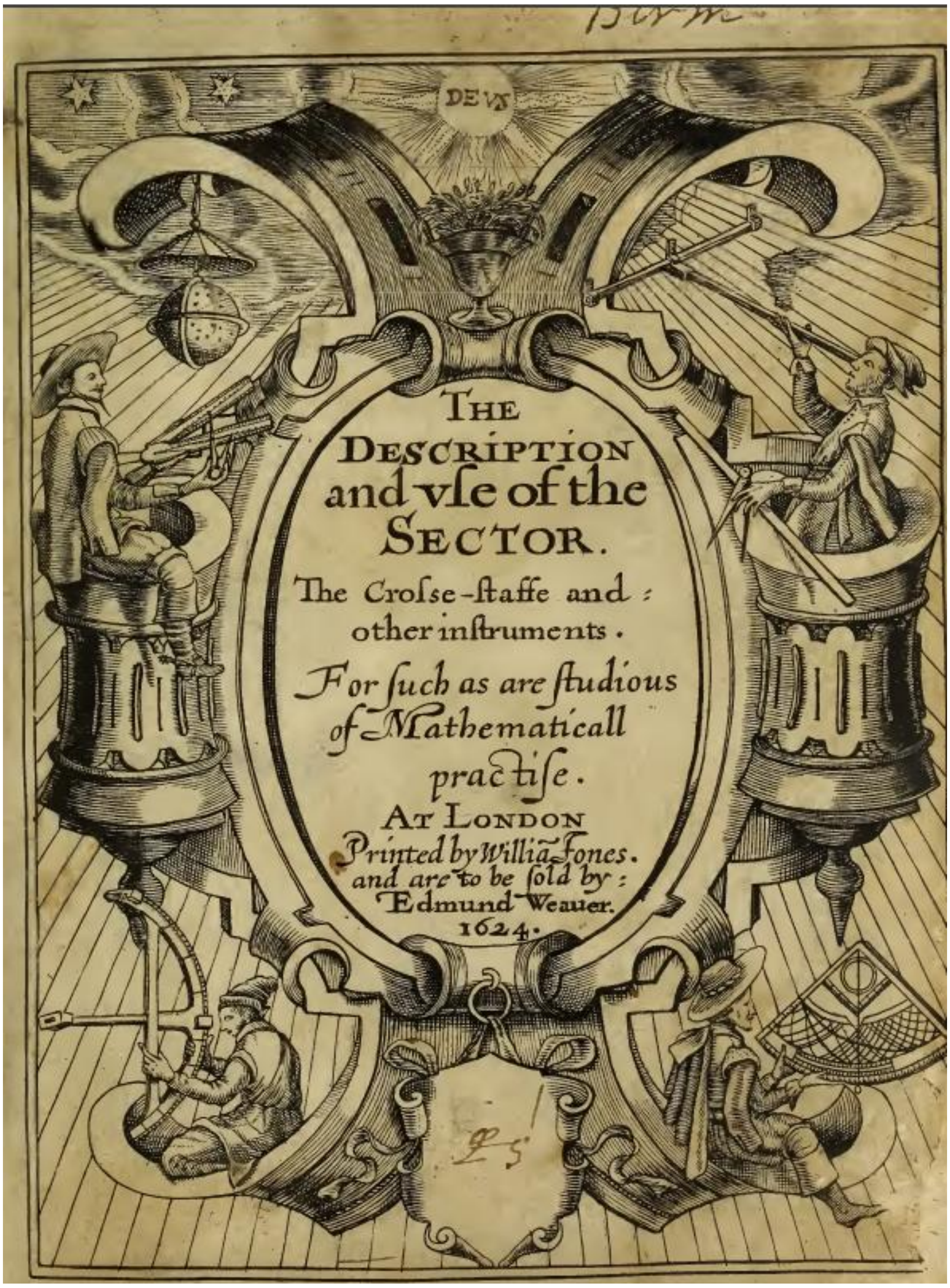
Sabendo-se da importância de futuros professores de Matemática reconhecerem o processo de construção do conhecimento matemático, a responsável pela disciplina promoveu uma excursão para a Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro, para a seção de obras raras, em outubro de 2019. A docente responsável pela excursão, Professora Naiara, dividiu os alunos em grupos, com o intuito de, a partir do trabalho em conjunto, explorar aspectos matemáticos em alguns tratados do século XVII.

Dessa forma, sua equipe, ao chegar no destino, deparou-se com o tratado *The description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments, for such as are studious of Mathematicall practise*[119], de autoria de Edmund Gunter (1581 – 1626), publicado em Londres, no ano de 1623, em sua primeira versão, no qual se observou o seguinte frontispício (Figura 1):

[118] Para mais informações sobre esse contexto histórico, acesse: https://drive.google.com/file/d/1xryXd6P0d3LiV9-DYOTfykniFS_0PWN2/view?usp=sharing.

[119] Lê-se em português: A descrição e uso do Setor, do *Cross-staff*, e outros instrumentos, para aqueles que são estudiosos de Matemática prática.

Figura 1 – Frontispício do tratado encontrado



Fonte: Gunter (1624, frontispício).

Ao lado do tratado, havia uma porta estranha inscrita com várias runas[120], a qual sua equipe decidiu abrir. Ao atravessar a passagem, vocês, em conjunto com a professora responsável pela excursão, depararam-se com uma igreja, representada na Figura 2. Com a ajuda da professora, que estuda as nuances da língua inglesa, foi possível constatar, após obter informações com pedestres, que o grupo estava próximo à igreja St. Clement, no ano de 1624.

[120] Linguagem antiga.

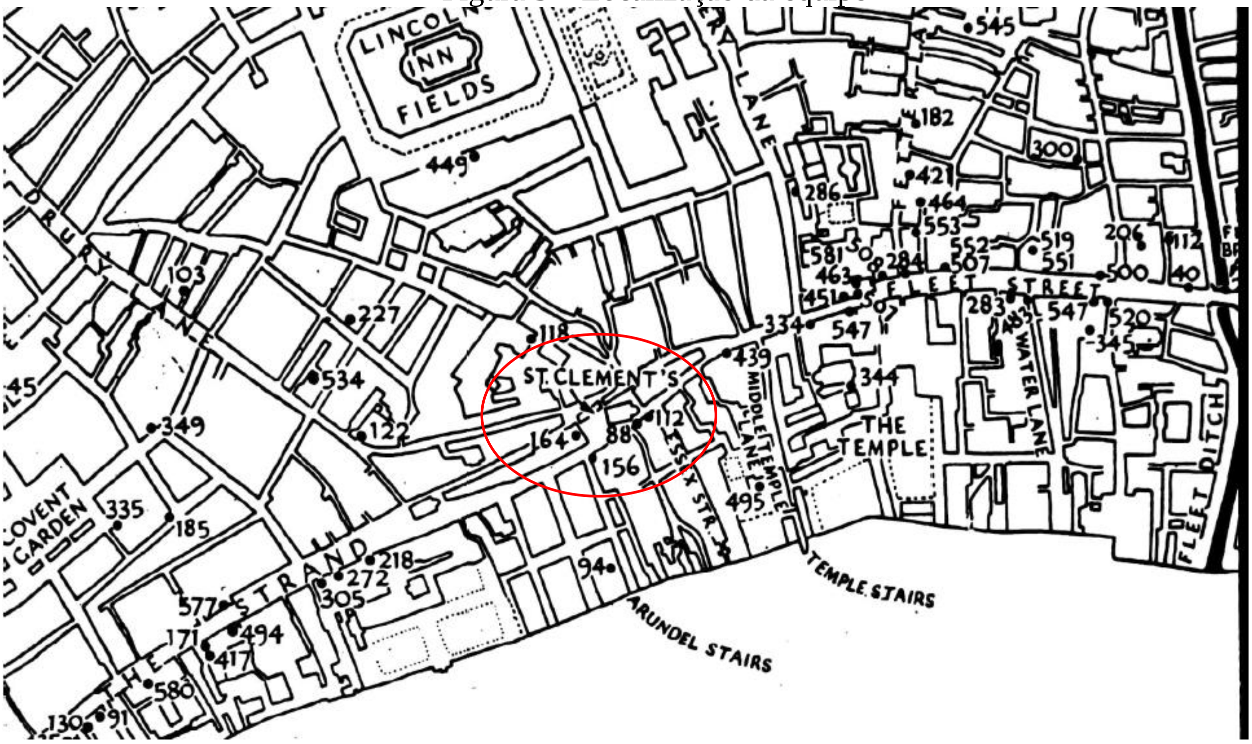
Figura 2 – Igreja St. Clement

Fonte: Parker (1836).

A única fonte de informação desse período e local, que o grupo tinha em mãos, era o tratado de Gunter (1623). Assim, folheando-o com a ajuda da professora, foram descobertas informações que poderiam ser úteis. Por exemplo, a confirmação do endereço em que a equipe estava, na igreja de St. Clement, na passagem: “These instruments are wrought in brasse by Elias Allen dwelling over against St Clements church without Tempel barre: and in wood by Jhon Thompsom dwelling in Hosiar Lane” (GUNTER, 1623, s/p), ou seja, “Estes instrumentos são forjados em latão por Elias Allen residindo em frente à igreja de São Clemente fora do Temple barre[121]: e em madeira por Jhon Thompson residindo em Hosiar Lane”. Com essa informação, o grupo decidiu encontrar a oficina de Elias Allen, pois era o endereço mais próximo de onde estava.

[121] Próximo à entrada principal de Londres.

Figura 3 – Localização da equipe



Fonte: Adaptado de Taylor (1968, p. s/p).

88 – Oficina de Charles Whitwell[122]

112 – Oficina de Elias Allen[123]

156 – Oficina de Nathaniel Noble[124]

164 – Casa de William Forster[125]

Vocês perceberam que havia várias oficinas de fabricantes de instrumentos onde a equipe se encontrava. Ao pedirem informações, seu grupo conseguiu chegar à oficina de Elias Allen e, enquanto esperavam para falar com ele, vocês exploraram o tratado que tinham em mãos, para entender qual sociedade era aquela em que estavam, como era Londres no século XVII, o que o tratado aborda e como poderiam utilizá-lo para voltar para casa.

[122] Fabricante de instrumentos matemáticos.
[123] Fabricante de instrumentos matemáticos.
[124] Fabricante de instrumentos matemáticos.
[125] Estudioso das matemáticas, foi aluno de William Oughtred, outro estudioso da época.

APÊNDICE B – CARTÃO TAREFA 1

Estudo sobre o contexto de elaboração do tratado

CARTÃO TAREFA 01

A partir da leitura do cartão de recurso 1 e das informações complementares obtidas por meio da leitura do texto sugerido sobre os séculos XVI e XVII, na Inglaterra, em grupo:

1) Elenquem alguns aspectos contextuais, ou seja, sociais, políticos e econômicos, que o grupo percebeu a partir da leitura e da discussão do texto. Para cada aspecto encontrado, apresentem evidências contidas no texto que o justifique.

Aspectos do documento	Evidências

2) Apontem elementos do frontispício da obra no que se refere à publicação, os elementos visuais, como as imagens dispostas, as informações que trazem o título da obra, a linguagem empregada ou outro aspecto que chamou a atenção do grupo. Para cada elemento encontrado no frontispício, apresentem evidências que justifiquem a escolha da equipe. Usem o quadro para ajudar na organização das ideias.

Elementos do frontispício	Evidências

Quais conclusões o grupo conseguiu extrair a respeito do tratado encontrado na Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro, após essas discussões? Escrevam um breve texto de, no máximo, 10 linhas sobre essas conclusões.

APÊNDICE C – CARTÃO DE RECURSO 2

Estudo sobre o instrumento *Cross-staff* e a escala dos números

CARTÃO DE RECURSO 02

De acordo com a ambientação no século XVII, na Inglaterra, e do estudo inicial do tratado de Gunter (1623), o grupo percebeu que, no frontispício, são apresentadas quatro ilustrações sobre os instrumentos relacionados com algumas práticas matemáticas, que são abordados no decorrer do tratado.

Nesse primeiro contato com o estudo de Gunter (1623), a professora Naiara reconheceu um instrumento em específico, o *Cross-staff* (Figura 1), que era, segundo Gunter (1623, p. 1), um instrumento “[...] muito conhecido por homens do mar, e muito usado por astrônomos antigos e outros, servindo astronomicamente para observação de altitude e ângulos de distância no céu, geometricamente para alturas e distâncias perpendiculares na terra e no mar”.

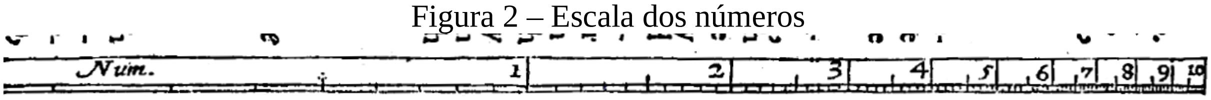
Figura 1 – *Cross-staff*

Fonte: Adaptado de Gunter (1623, frontispício).

Foi percebido pelo grupo, durante um estudo da parte que trata sobre o *Cross-staff*, que as partes necessárias para compor esse instrumento são cinco: o *staff*, o *cross* e três miras. O *staff*, que Gunter fez para seu próprio uso, tinha uma jarda inteira de comprimento, que servia como medida. O *cross*, que pertencia a esse *staff*, era de 26 polegadas e 1/5 entre as duas miras externas. Gunter (1623) acrescenta que a proporção entre o *staff* e o *cross* poderia ser de 360 a 262.

No que se referia às escalas, a equipe constatou que esse instrumento tinha 12 escalas divididas entre o *cross* e o *staff*. No *cross*, eram inscritas cinco escalas e, no *staff*, mais sete, divididas em quatro tipos. Contudo, uma escala do conjunto das escalas, para trabalhar proporção de vários tipos, chamou a atenção do grupo, a escala dos números, observada na Figura 2.

Figura 2 – Escala dos números



Fonte: Gunter (1623, p. 31).

Ao perceber o interesse do grupo pela escala dos números, a professora Naiara traduziu um trecho do documento, no qual são descritas características dessa escala. Gunter (1623, p. 2-4) descreve que a escala dos números é “[...] anotada com a letra N, dividida desigualmente em 1000 partes, e numerada com 1. 2. 3. 4. até 10”. O autor também indica que “a escala dos números pode ser inscrita do primeiro Chiliad Logarithmes[126] do Sr. Briggs [...]”.

Antes mesmo de a professora terminar a leitura, o artesão Elias Allen, famoso pela fabricação de instrumentos em latão e por propiciar encontros de estudiosos, chega à oficina. A professora Naiara tenta explicar como o grupo chegou à Inglaterra do século XVII e é respondida pelo artesão.

A professora traduz o que Elias falou e diz ao grupo:

– Nós precisamos resolver tarefas em Londres, para que possamos retornar à Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro, em nossa época certa.

[126] Para visualizar esse estudo, acesse: https://drive.google.com/file/d/16hZ3IVDN_2HKxOhn4oaKh1A4QFtfAHIY/view?usp=sharing.

APÊNDICE D – CARTÃO TAREFA 2

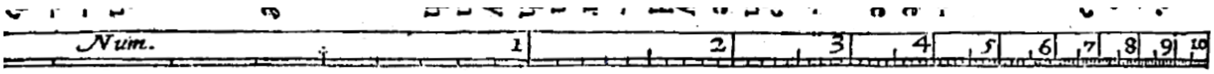
Estudo sobre o instrumento *Cross-staff* e a escala dos números

CARTÃO TAREFA 02

A partir da leitura do cartão de recurso 2, que aborda o instrumento *Cross-staff* e a escala dos números, discutam e, em grupo, respondam aos problemas.

1) Apontem, na figura abaixo, cada parte que compõe o *Cross-staff*, a partir da leitura do cartão de recurso 2 e das discussões da equipe. O que o homem da figura está segurando na mão esquerda? Por que vocês acham que ele está segurando esses elementos?

2) Observem a escala dos números vista a seguir. Mediante uma discussão na sua equipe, quais são suas primeiras impressões sobre a escala? Quais características são percebidas nas marcações dessa escala?



3) Quais apontamentos vocês conseguiram fazer a respeito das marcações da escala dos números? Quais são suas hipóteses para essa escala se chamar escala dos números?

4) À primeira vista, quais aspectos matemáticos o grupo conseguiu visualizar nessa escala? O que vocês entenderam pela passagem do tratado a respeito da escala dos números ser "anotada com a letra N, dividida desigualmente em 1000 partes, e numerada com 1. 2. 3. 4. até 10"? O que são os números que Gunter (1623) se refere?

APÊNDICE E – CARTÃO DE RECURSO 3

Uso da escala dos números para manipular proporção contínua

CARTÃO DE RECURSO 03

O uso da escala dos números (line of *numbers*)

1. **Tendo dois números dados, para encontrar um terço em proporção contínua, um quarto, um quinto e assim por diante**.

Estenda o compasso do primeiro número para o segundo; então você pode transformá-los do segundo para o terceiro, e do terceiro para o quarto, e assim por diante.

Deixe os dois números dados serem 2 e 4, estenda o compasso de 2 para 4, então você poderá transformá-los de 4 para 8, e de 8 para 16, e de 16 para 32, e de 32 para 64 e de 64 para 128.

Ou, se um pé do compasso estiver definido como 64, o outro cair fora da linha, você pode configurá-lo para outro 64 mais próximo do início da escala, e aí o outro pé alcançará 128, e de 128 você poderá transformá-los em 256, e assim por diante.

Ou, se os dois primeiros números dados foram 10 e 9: estenda o compasso de 10 no final da escala, de volta para 9, então você poderá transformá-los de 9 para 8,1 e de 8,1 para 7,29. E assim, se os dois primeiros números dados fossem 1 e 9, o terceiro seria 81, o quarto 729, com a mesma extensão do compasso.

Da mesma maneira, se os dois primeiros números foram 10 e 12, você pode encontrar o terceiro proporcional em 14,4, o quarto 17,28. E com a mesma extensão do compasso, se os dois primeiros números fossem 1 e 12, o terceiro seria 144 e o quarto 1728.

Extraído de Gunter (1623, p. 18-19).

APÊNDICE F – CARTÃO TAREFA 3

Uso da escala dos números para manipular proporção contínua

CARTÃO TAREFA 03

Como o grupo precisa realizar algumas tarefas em Londres para voltar para casa, Elias Allen o orientou a estudar a manipulação da escala dos números. Assim, a equipe precisa entender como manusear a escala para o uso de proporção contínua.

Dessa forma, com base na leitura do cartão de recurso 3, em que consta o manuseio da escala dos números para proporção contínua e com a manipulação da escala, respondam:

1) A partir da leitura e da discussão com seu grupo das ideias centrais do texto, procurem entender o uso da escala dos números para a manipulação da proporção contínua e manuseiem-na com auxílio do compasso. Anotem suas impressões.
2) Qual o significado do trecho “Tendo dois números dados, para encontrar um terço em proporção contínua, um quarto, um quinto e assim por diante” associada ao manuseio da escala dos números? Com base na vivência como futuros professores de Matemática, principalmente advinda do uso dos livros didáticos na Educação Básica, esses termos são utilizados na Matemática moderna?
3) A partir da manipulação da escala e das discussões em equipe, expliquem a passagem “[...] se um pé do compasso estiver definido como 64, o outro cair fora da escala, você pode configurá-lo para outro 64 mais próximo do início da escala [...]”. Após a explicação da citação, o que se entende por configurar um número para o início da escala?
4) No manuseio da escala dos números para o uso de proporção contínua, quais saberes matemáticos foram mobilizados? Descrevam, no mínimo, cinco, associando-os aos

movimentos realizados com a escala dos números e o compasso. Para facilitar a organização das ideias, preencham o quadro em anexo.

Nº	Saber matemático	Movimentos com o compasso e a escala dos números
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

APÊNDICE G – CARTÃO TAREFA 4

Manipulação da escala dos números para resolver problemas sobre proporção contínua

CARTÃO TAREFA 04

Após a apropriação do manuseio da escala dos números para proporção contínua, Elias Allen passou para o grupo a primeira missão: fazer um levantamento da produção de instrumentos em Londres.

Sua equipe se juntou a um grupo de estudiosos, que pesquisam sobre a fabricação de instrumentos em Londres no século XVI, para completar a primeira tarefa proposta por Elias. Assim, nessa investigação, o grupo teve a oportunidade de conhecer um pouco mais sobre o contexto histórico de elaboração do tratado de Gunter (1623), visto que tiveram contato com os demais instrumentos que ele desenvolveu ao fazerem o levantamento desses artefatos. Com o apanhado de informações adquiridas em diversas oficinas de artesãos de Londres, na contabilidade de fabricação de instrumentos nos últimos anos, foram obtidas algumas considerações.

Vocês constataram que a produção de instrumentos matemáticos estava em ascensão no final do século XVI e início do XVII e o aumento da fabricação de instrumentos obedecia a uma proporção contínua. Portanto, o grupo percebeu que, em janeiro de 1560, foram produzidos 10 instrumentos em Londres; no ano seguinte, foram fabricados 30. A partir de 1624, a produção de instrumentos decaiu a cada 6 meses, também obedecendo a uma proporção contínua; passando de 1000 instrumentos fabricados, em janeiro de 1624, para a produção de 600 instrumentos em julho do mesmo ano. Porém, ao deslocarem-se de uma oficina para outra, vocês perderam os dados que foram coletados, restando apenas as informações iniciais e a escala dos números. Dessa maneira, respondam:

1) Quantos instrumentos foram produzidos em 1563 em Londres? Registrem como o grupo chegou à resposta, detalhem como foi feita a manipulação da escala e elejam um

integrante do grupo para gravar um vídeo manipulando a escala e explicando o processo para chegar à resposta.

2) Quantos instrumentos foram fabricados em 1565? Registrem como o grupo chegou à resposta, detalhem como foi feita a manipulação da escala e elejam um integrante do grupo para gravar um vídeo manipulando a escala e explicando o processo para chegar à resposta.

3) No cenário do ano em que vocês estão em Londres, 1624, aproximadamente, quantos instrumentos serão fabricados em janeiro de 1626? E em julho do mesmo ano? Descrevam detalhadamente o processo que seu grupo utilizou para obter a resposta ao manipular a escala dos números e elejam um integrante do grupo para gravar um vídeo manipulando a escala e explicando o processo para chegar às respostas.

4) A partir das reflexões realizadas em equipe, o que é a proporção contínua? Descrevam em linguagem matemática o manuseio da escala dos números no uso da proporção contínua e escrevam possíveis fórmulas que matematizem essa manipulação.

APÊNDICE H – CARTÃO DE RECURSO 5

Uso da escala dos números para manipular média proporcional

CARTÃO DE RECURSO 05

O uso da escala dos números (line of *numbers*)

2. Tendo dois números extremos dados, para encontrar uma média proporcional entre eles.

Divida o espaço entre os números extremos em duas partes iguais, e o pé do compasso permanecerá na proporcional média. Portanto, os números extremos dados sendo 8 e 32, a média entre eles será 16, o que pode ser comprovado pela antiga *proposição*, em que foi mostrado, que como 8 a 16, também são 16 a 32.

Extraído de Gunter (1623, p. 19).

APÊNDICE I – CARTÃO TAREFA 5

Uso da escala dos números para manipular média proporcional

CARTÃO TAREFA 05

Depois de vocês compreenderem a manipulação da escala dos números para a utilização da proporção contínua e realizarem a primeira missão sobre o levantamento da produção de instrumentos em Londres, o artesão Elias Allen solicitou que o grupo se apropriasse agora da manipulação da escala dos números para obter a média proporcional. A partir da leitura do cartão de recurso 5:

1) Procurem entender o manuseio da escala dos números para obter a média proporcional.
2) Expliquem como se divide um segmento em duas partes iguais. Por que é necessário realizar esse procedimento para encontrar a média proporcional de dois números dados na escala?
3) Discutam a relação entre a média proporcional e a proporção contínua. Destaquem aspectos semelhantes entre os dois manuseios.
4) Elenquem os saberes matemáticos que foram mobilizados. Descrevam, no mínimo, cinco, associando-os aos movimentos realizados com a escala dos números e o compasso. Para facilitar a organização das ideias, preencham o quadro em anexo.

Nº	Saber matemático	Movimentos com o compasso e a escala dos números
1		
2		
3		
4		
5		
6		

7		

APÊNDICE J – CARTÃO TAREFA 6

Manipulação da escala dos números para resolver problemas sobre média proporcional

CARTÃO TAREFA 06

Após a conclusão da primeira missão de mapear a produção de instrumentos, em Londres, e a apropriação do manuseio da escala dos números para obter a média proporcional, Elias Allen designou o grupo para a segunda missão utilizando a escala dos números: ajudar uma equipe de agrimensores a fazer os levantamentos de terrenos em Londres.

Os agrimensores[127] estão fazendo levantamentos de terrenos, que serão vendidos para a construção de jardins e parques. Nessa apuração, foi constatado que há dois tipos de terrenos em Londres, retangulares e quadrangulares de superfícies iguais. Dessa maneira, respondam às situações usando a escala dos números.

5) Na região leste de Londres, os terrenos retangulares têm comprimento de 27 jardas[128] por 12 de largura. Qual o comprimento do lado dos terrenos quadrangulares dessa região londrina?

6) Já na região oeste de Londres, os agrimensores mediram os terrenos quadrados e constataram lado igual a 32 jardas. Se os terrenos retangulares tivessem 8 jardas de largura, quanto teriam de comprimento?

7) Se a quarta proporcional dos números 3 e 7 é igual ao lado do terreno quadrangular da região sul de Londres e a quinta proporcional entre 2 e 5 é o comprimento dos terrenos retangulares, qual a medida da largura dos lotes retangulares?

8) O que é a média proporcional nesse contexto? Descrevam, em linguagem matemática, o manuseio da escala dos números para obter a média proporcional e escrevam possíveis fórmulas que matematizem essa manipulação.

[127] Pessoas responsáveis por medição de terra.
[128] Unidade de medida utilizada no século XVII em Londres.

Ao concluírem todas as tarefas e as missões que Elias Allen atribuiu ao grupo, vocês retornaram à sua oficina. Chegando lá, ele os apresentou ao autor do tratado que vocês tinham encontrado na Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro.

A professora Naiara foi responsável pela apresentação da equipe a Edmund Gunter e contou como o grupo chegou a Londres e suas aventuras pela região. Ao final, Naiara perguntou:

– Mestre Gunter, nós já resolvemos várias tarefas e missões em Londres utilizando a escala dos números, que o senhor desenvolveu e cumprimos missões, que Elias Allen nos designou. O senhor sabe como podemos voltar para casa?

Gunter ficou surpreso com a explicação, pois o grupo não estava em sua devida época, nem em seu local de origem. Logo, Edmund os aconselhou a irem à igreja de St. Clement, local em que eles aparataram em Londres e responderem ao seguinte questionamento para voltarem para casa:

– Quais conhecimentos, contextuais e matemáticos, vocês mobilizaram ao estudar meu tratado e a escala dos números que eu desenvolvi?

Assim, o grupo se despediu de ambos os praticantes de Matemática, Elias e Edmund, e se deslocou até a igreja de St. Clement. Ao chegarem lá, eles responderam à pergunta que Gunter fez e um portal de cor roxa apareceu na parede da igreja.

Ao atravessarem o portal, o grupo se deparou com as prateleiras da Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro e, em um calendário próximo, datava-se o ano de 2019.

APÊNDICE K – CARTÃO TAREFA 7

Formalização dos conhecimentos mobilizados na manipulação da proporção contínua e da média proporcional

CARTÃO TAREFA 07

Como licenciandos e futuros professores de Matemática, formalizem os saberes matemáticos percebidos ao manusearem a escala dos números para um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua e para obter uma média proporcional. Utilizem livros de nível superior para fundamentarem os conhecimentos mobilizados nessas duas manipulações.

1) Quais saberes matemáticos presentes em livros de nível superior o grupo mobilizou ao manipular a escala dos números para encontrar um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua? Referenciem os livros utilizados para a formalização das ideias. Há concepções matemáticas que foram utilizadas, mas não se encontram em livros do ensino superior? Se sim, quais conceitos?
2) Quais saberes matemáticos presentes em livros de nível superior o grupo mobilizou ao manipular a escala dos números para obter a média proporcional? Referenciem os livros utilizados para a formalização das ideias. Há concepções matemáticas que foram utilizadas, mas não se encontram em livros do ensino superior? Se sim, quais conceitos?

APÊNDICE L – PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ
Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática – GPEHM/UECE
Programa de Formação Docente – PFD/GPEHM/UECE

PROGRAMA DE ENSINO

CURSO: Sobre os saberes matemáticos mobilizados na manipulação da escala dos números desenvolvida por Edmund Gunter
CARGA HORÁRIA: 40h/a
HORÁRIO: EF
PERÍODO: 25 de maio a 29 de julho
VAGAS: 8

DOCENTE: Andressa Gomes dos Santos
ORIENTADORA: Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira

EMENTA
Esse curso teve como objetivo mobilizar os saberes matemáticos incorporados na escala dos números inscrita no staff do instrumento *Cross-staff*, contido no tratado *The Description and vse of the Sector, the Crosse-staffe, and other instruments...*, a partir da sua manipulação da proporção contínua e da média proporcional.

PROGRAMA

CONTEÚDOS	CH
UNIDADE 1: Ambientação no século XVII em Londres 1.1. O contexto de elaboração do tratado *The Description and use of the Sector. The Crosse-staffe and other instruments...*; 1.2. A matemática percebida no frontispício do documento.	4h/a
UNIDADE 2: O instrumento *Cross-staff* e a escala dos números 2.1. O instrumento *Cross-staff* desenvolvido por Edmund Gunter; 2.2. Estudo inicial sobre a escala dos números; 2.3. Os conhecimentos incorporados na escala dos números.	4h/a
UNIDADE 3: O uso da proporção contínua 3.1. Estudo inicial sobre a proporção contínua; 3.2. Saberes matemáticos mobilizados no uso da proporção contínua a partir da manipulação da escala dos números.	8h/a
UNIDADE 4: Aplicação da proporção contínua 4.1. Aplicação da proporção contínua em um problema prático; 4.2. Delineamento dos saberes matemáticos mobilizados na realização dos problemas de ordem prática.	4h/a
UNIDADE 5: O uso da média proporcional 5.1. Estudo inicial sobre a média proporcional;	6h/a

5.2. Saberes matemáticos mobilizados para obter a média proporcional a partir da manipulação da escala dos números	
UNIDADE 6: Aplicação da média proporcional 6.1. Aplicação da média proporcional em um problema prático; 6.2. Delineamento dos saberes matemáticos mobilizados na realização dos problemas de ordem prática.	10h/a
UNIDADE 7: Formalização das ideias matemáticas 7.1 Sistematização dos saberes mobilizados ao manipular a escala dos números no uso da proporção contínua; 7.2 Sistematização dos saberes mobilizados ao manipular a escala dos números no uso da média proporcional.	4h/a

METODOLOGIA

Como estratégia metodológica, serão propostas, aos participantes, situações que irão estimular o desencadeamento de ações, que têm como objetivo oportunizar condições de estudar alguns conceitos matemáticos por meio do manuseio de uma escala desenvolvida no século XVII. Para isso, serão realizadas discussões de ideias e a mobilização de saberes matemáticos a partir da vivência, participação e formação dos discentes.

AVALIAÇÃO

A avaliação acontecerá por meio da assiduidade, pontualidade, entrega de relatórios e participação dos discentes.

APÊNDICE M – CRONOGRAMA DA ATIVIDADE

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Sobre os saberes matemáticos mobilizados na manipulação da escala dos números desenvolvida por Edmund Gunter

Atividade

Sobre os saberes matemáticos mobilizados na manipulação da escala dos números desenvolvida por Edmund Gunter

Andressa Gomes dos Santos
Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira

Cronograma da formação

DATA	PROBLEMAS	TEMPO
25/05/2021 Tarefa 1	Introdução	10 min
	Problema 1 – Contexto de elaboração do tratado	50 min
	Discussão	20 min
	Fechamento Formulário de tarefa e ficha de avaliação do dia	10 min
27/05/2021 Tarefa 1	Introdução	05 min
	Problema 2 – Conhecendo o tratado de Gunter (1623)	60 min
	Discussão	20 min
	Fechamento Formulário de tarefa e ficha de avaliação do dia	05 min
01/06/2021 Tarefa 2	Introdução	05 min
	Problema 1 – Conhecer o *Cross-staff* em que a escala dos números está inserida	30 min
	Problema 2 – Primeiras discussões acerca da escala dos números	30 min
	Discussão	20 min
	Fechamento Ficha de avaliação do dia	05 min

03/06/2021 **Tarefa 2**	Introdução	05 min
	Problema 3 – Discussão sobre as marcações da escala dos números	30 min
	Problema 4 – Percepções sobre a Matemática incorporada na escala dos números a partir da sua descrição e dos elementos da escala	30 min
	Discussão	20 min
	Fechamento Ficha de avaliação do dia	05 min
05/06/2021 **Tarefa 3**	Introdução	05 min
	Problema 1 – Reflexão sobre a manipulação da escala dos números para a proporção contínua	60 min
	Discussão	20 min
	Fechamento Ficha de avaliação do dia	05 min
10/06/2021 **Tarefa 3**	Introdução	05 min
	Problema 2 – Compreensão de termos matemáticos relacionados à manipulação da escala dos números para a proporção contínua	60 min
	Discussão	20 min
	Fechamento Ficha de avaliação do dia	05 min
15/06/2021 **Tarefa 3**	Introdução	05 min
	Problema 3 – Transformação de ordem dos números para a manipulação da escala (multiplicação por 10)	30 min
	Discussão	20 min
	Fechamento Ficha de avaliação do dia	05 min
17/06/2021 **Tarefa 3**	Introdução	05 min
	Problema 4 – Primeiras considerações sobre os conhecimentos mobilizados na manipulação da escala para a proporção contínua	60 min
	Discussão	20 min
	Fechamento Ficha de avaliação do dia	05 min
22/06/2021 **Tarefa 4**	Introdução à aula	05 min
	Problema 1 – Manipulação da escala em um problema contextualizado	30 min

	Problema 2 – Estimular a mobilização dos conhecimentos de transformação de um número para o início da escala	30 min
	Discussão	20 min
	Fechamento Ficha de avaliação do dia	05 min
24/06/2021 **Tarefa 4**	Introdução à aula	05 min
	Problema 3 – Estimular a mobilização dos conhecimentos de transformação de um número na escala de maneira decrescente	30 min
	Problema 4 – Sistematização das ideias de forma matemática	30 min
	Discussão	20 min
	Fechamento Ficha de avaliação do dia	05 min
29/06/2021 **Tarefa 5**	Introdução	05 min
	Problema 1 – Reflexão sobre a manipulação da escala dos números para média proporcional	60 min
	Discussão	20 min
	Fechamento Ficha de avaliação do dia	05 min
01/07/2021 **Tarefa 5**	Introdução	05 min
	Problema 2 – Discussão acerca da divisão do segmento em duas partes iguais	30 min
	Problema 3 – Relação da proporção contínua e da média proporcional	30 min
	Discussão	20 min
	Fechamento Ficha de avaliação do dia	05 min
06/07/2021 **Tarefa 5**	Introdução	05 min
	Problema 4 – Primeiras considerações sobre os conhecimentos mobilizados na manipulação da escala para obter média proporcional	60 min
	Discussão	20 min
	Fechamento Ficha de avaliação do dia	05 min
08/07/2021 **Tarefa 6**	Introdução	05 min
	Problema 1 – Reflexão acerca de área de superfícies semelhantes com procedimento de média proporcional	60 min
	Discussão	20 min

	Fechamento Ficha de avaliação do dia	05 min
13/07/2021 **Tarefa 6**	Introdução	05 min
	Problema 2 – Reflexão acerca de área de superfícies semelhantes com procedimento de média proporcional	60 min
	Discussão	20 min
	Fechamento Ficha de avaliação do dia	05 min
15/07/2021 **Tarefa 6**	Introdução	05 min
	Problema 3 – Reflexão sobre a proporção contínua associada à média proporcional a partir do contexto do problema	60 min
	Discussão	20 min
	Fechamento Ficha de avaliação do dia	05 min
20/07/2021 **Tarefa 6**	Introdução	05 min
	Problema 4 – Sistematização das ideias de forma matemática	60 min
	Discussão	20 min
	Fechamento Ficha de avaliação do dia	05 min
22/07/2021 **Tarefa 6**	Introdução	05 min
	Problema 4 – Sistematização das ideias de forma matemática	60 min
	Discussão	20 min
	Fechamento Ficha de avaliação do dia	05 min
27/07/2021 **Tarefa 7**	Introdução	05 min
	Problema 1 – Formalização dos conhecimentos percebidos pelos licenciandos ao manipularem a escala para obter um terço, um quarto, um quinto etc. em proporção contínua	60 min
	Discussão	20 min
	Fechamento Ficha de avaliação do dia	05 min
29/07/2021 **Tarefa 7**	Introdução	05 min
	Problema 2 – Formalização dos conhecimentos percebidos pelos participantes ao manipularem a escala para obter a média proporcional de dois números	60 min

	Discussão	15 min
	Conclusão da formação Ficha de avaliação do dia	10 min

Materiais utilizados

Para a atividade, serão utilizados por cada discente:

Escala dos números impressa

Compasso

Cartão de recurso 1

Cartão tarefa 1

Cartão de recurso 2

Cartão tarefa 2

Cartão de recurso 3

Cartão tarefa 3

Cartão tarefa 4

Cartão de recurso 5

Cartão tarefa 5

Cartão tarefa 6

Cartão tarefa 7

Por grupo:

Fichas de avaliação do dia (Formulário on-line)

Relatórios dos problemas das tarefas (Formulário on-line)