UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

GLAIDON FARIAS SUDÁRIO DA SILVA

APLICAÇÕES COTIDIANAS DAS CÔNICAS: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOB A PERSPECTIVA DA PEDAGOGIA HISTÓRICO-CRÍTICA

CRUZ DAS ALMAS
2024

GLAIDON FARIAS SUDÁRIO DA SILVA

APLICAÇÕES COTIDIANAS DAS CÔNICAS: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOB A PERSPECTIVA DA PEDAGOGIA HISTÓRICO-CRÍTICA

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, oferecido pela Universidade Federal do Recôncavo da Bahia.

Orientador: Prof. Dr. Danilo de Jesus Ferreira

Cruz das Almas

2024

S586a Silva, Glaidon Farias Sudário da.
Aplicações cotidianas das cônicas: uma proposta de sequência didática sob a perspectiva da pedagogia histórico-crítica / Glaidon Farias Sudário da Silva.–Cruz das Almas, BA, 2024.
86f.; il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT.

Orientador: Prof. Dr. Danilo de Jesus Ferreira.

1.Matemática – Estudo e ensino. 2.Seções cônicas – Equações. 3.Geometria analítica – Análise. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título.

CDD: 515.15

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas - UFRB. Responsável pela Elaboração Antonio Marcos Sarmento das Chagas (Bibliotecário - CRB5 / 1615).

GLAIDON FARIAS SUDÁRIO DA SILVA

APLICAÇÕES COTIDIANAS DAS CÔNICAS: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOB A PERSPECTIVA DA PEDAGOGIA HISTÓRICO-CRÍTICA

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, oferecido pela Universidade Federal do Recôncavo da Bahia.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Danilo de Jesus Ferreira (Orientador)
UFRB

Julianna Pinele Santos Porto

Profa. Dra. Julianna Pinele Santos Porto
UFRB

Profa. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes
UNILAB

Este trabalho é dedicado aos meus filhos, Mário, Júlia e Cecília,
vocês são molas propulsoras.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pela dádiva das asas que me permitiram alçar voo durante todo o curso. Sem elas, nada seria possível. Em seguida, quero dedicar um agradecimento especial aos meus pais, Edézio e Ediralva, pelos ensinamentos para a vida e pelo apoio educacional incondicional que sempre me foi oferecido.

Não posso deixar de mencionar o apoio e a compreensão da minha esposa, que esteve ao meu lado durante toda essa jornada. Agradeço também aos meus filhos, Mario, Júlia e Cecília, por serem a inspiração que transcende qualquer limite, o amor que ultrapassa fronteiras.

Aos meus queridos irmãos, Edézio Júnior e Flaviane Sudário. Vocês são grandes exemplos.

Um agradecimento especial aos meus amados avós, cuja memória permanece viva. Recordo com saudade os momentos de uma infância envolta em amor e carinho.

Agradeço aos professores que desempenharam um papel importante no meu desenvolvimento acadêmico e pessoal, em particular ao professor Danilo de Jesus pela orientação precisa e pelas aulas enriquecedoras. Ao professor Luis, expresso minha gratidão por seu encorajamento constante e por me fazer acreditar na palpabilidade do sucesso.

Aos professores Anderson, Rogelma, Andrade, Adson e Ariston, agradeço pelo comprometimento, dedicação e pela clareza com que delinearam os caminhos do conhecimento.

Às professoras, Amanda Angélica Feltrin Nunes e Julianna Pinele Santos Porto, pelas inestimáveis sugestões que enriqueceram de forma grandiosa essa dissertação.

Aos companheiros de curso, Arionaldo e Isabel, agradeço pela inestimável parceria, pela colaboração e pelo apoio mútuo que nos fortaleceu ao longo do percurso.

Agradeço a compreensão e o apoio dos meus gestores e coordenadores, que estiveram ao meu lado nos mais diversos momentos.

Enfim, expresso minha gratidão a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste projeto.

“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade,
mas também suprema beleza
- uma beleza fria e austera, como a da escultura.”
(Bertrand Russel)

RESUMO

As cônicas, desde os estudos de Apolônio até as concepções analíticas contemporâneas, desempenham um papel crucial na compreensão de diversas áreas do conhecimento. Este trabalho visa fortalecer o processo de ensino-aprendizagem por meio de uma revisão bibliográfica dos conceitos e teorias relacionados às cônicas. Será destacada sua importância histórica, relevância na geometria analítica e a apresentação de teoremas fundamentais que aprofundam a compreensão dessas curvas. Além disso, será proposta uma sequência didática, ancorada nos pressupostos da pedagogia histórico-crítica, buscando a eficácia e acessibilidade para estudantes e professores da educação básica. Serão discutidas as aplicações práticas das cônicas no cotidiano, visando promover uma aprendizagem significativa, incentivando a exploração dessas curvas por meio da experimentação e do raciocínio lógico. Espera-se que este estudo contribua para o desenvolvimento de estratégias palpáveis para o ensino das cônicas, capacitando os alunos com as ferramentas necessárias para compreender e aplicar esses conceitos de forma significativa em sua prática social.

Palavras-chave: Cônicas; Geometria Analítica; Sequência Didática; Pedagogia Histórico-Crítica.

ABSTRACT

The conics, since Apolônio's study to the comtemporany analistic's conceptions, perform a important perfil to the comprehension of a lot of areas of knowing. This work intend fortify the process of teaching-learning across a bibliography of concepts and a teory who relation the conics. Will be highlighted your history importance, analytical geometry relevance and the presentantion of fundamental theorems that deepen the understanding of these curves. Moreover, will be propoused a didactics sequence, based on the assumption from the history critic pedagogy, finding an efficiency and acessibility to the students and teachers from basic education. Will be discussion the pratic enforcement from the conics in the daily, finding promove a learning, encouraging a explore of this curves with experimentation and logical reasoning. Is expected the study help from the development of strategies for the conic's teaching, enable the students with the necessary tools for comprehension and apliccation of this concepts with a significative way in the social pratics.

Keywords: Conics; Analytical Geometry; Didatic Sequence; Critical Historical Pedagogy.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A geometria analítica tem uma rica história de desenvolvimento e aplicações práticas. No cerne desse progresso estão desafios matemáticos e a contribuição de mentes brilhantes que moldaram seu curso. Todavia, ainda se percebe o ensino das cônicas, sobretudo na educação básica, atrelado ao método tradicional de ensino.

O ensino tradicional de geometria, frequentemente, adota métodos passivos, como aulas expositivas e exercícios repetitivos, o que pode levar à falta de engajamento e compreensão por parte dos alunos. Essa abordagem tende a transformar os alunos em meros receptores de informações, o que não é eficaz para todos os estudantes, especialmente aqueles que têm uma inclinação para uma aprendizagem mais interativa e prática.

Além disso, o ensino tradicional muitas vezes prioriza a memorização de fórmulas e procedimentos geométricos em vez de promover uma compreensão abrangente dos conceitos. Isso pode resultar em aprendizagem superficial e em dificuldades na aplicação dos conhecimentos no cotidiano. Essas dificuldades são agravadas quando as necessidades individuais de aprendizagem dos alunos não são consideradas, o que pode gerar uma disparidade no processo de aprendizado entre os alunos.

Na contramão das teorias tradicionais, a Base Nacional Curricular Comum propõe que

> a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2018, p. 276).

Nessa perspectiva exploratória, dinâmica e social, busca-se que o aluno desenvolva o pensamento crítico tornado-se protagonista no processo de ensino aprendizagem. Conforme indica Petenucci (2008), o caminhar junto a tendências pedagógicas que valorizam o contexto social do aluno é fundamental para o enriquecimento do processo de aprender, já que

> as tendências pedagógicas podem ser um caminho para esta superação, pois se baseiam em movimentos sociais, filosóficos e antropológicos, atendendo ao momento histórico no qual estão inseridas. Estas influenciam as práticas pedagógicas que estão associadas às expectativas da sociedade. Assim, é de primordial importância que os professores conheçam as tendências pedagógicas, para que estes possam construir conscientemente a sua própria trajetória

> político-pedagógica. Através destes conhecimentos poderão propor mudanças, transformando a prática educativa em uma ação efetiva para que o ensino consiga transpor as dimensões do espaço escolar (PETENUCCI, 2008, p.2).

Diante da necessidade de explorar uma metodologia que promova de maneira eficaz a aquisição e a consolidação do conhecimento, busca-se nesta dissertação a elaboração de uma proposta de sequência didática fundamentada nos princípios da pedagogia histórico-crítica, objetivando dinamizar e fortalecer o ensino das cônicas. Para tanto, este trabalho estruturar-se-á em capítulos que abordam aspectos essenciais para a organização e sistematização do processo de ensino-aprendizagem das cônicas.

No capítulo 2, explora-se o clássico problema da duplicação do cubo, um desafio que intrigou matemáticos desde a antiguidade. Além disso, examina-se as cônicas de Apolônio, que são curvas notáveis e desempenharam um papel crucial na compreensão geométrica. Destaca-se também a importância das contribuições de René Descartes e Pierre de Fermat, cujas ideias fundamentais estabeleceram as bases para a geometria analítica moderna.

No capítulo 3, estudam-se as propriedades das cônicas, com foco especial na elipse, hipérbole e parábola. Estas curvas, estudadas minuciosamente, revelam padrões matemáticos intrigantes e têm aplicações vastas em diversos campos do conhecimento. Além disso explora-se as translações dos planos cartesianos, um conceito-chave para compreender transformações geométricas. Essas operações são importantes para a análise de movimentos e mudanças no espaço, expandindo as capacidades da geometria analítica.

No capítulo 4, há um direcionamento para o papel das cônicas no cotidiano, em particular, para o estudos das propriedades da elipse, hipérbole e parábola em atividades lúdicas como o jogo de bilhar elíptico, hiperbólico e parabólico. Neste capítulo, discorre-se sobre sequências didáticas com suporte teórico da pedagogia histórico-crítica, destacando a importância da geometria analítica, em particular, das cônicas na compreensão do mundo ao nosso redor.

Ao explorar esses temas de forma sequencial, procura-se revelar a interconexão entre teoria e aplicação das cônicas, tomando como ações norteadoras as sequências didáticas à luz da pedagogia histórico-crítica.

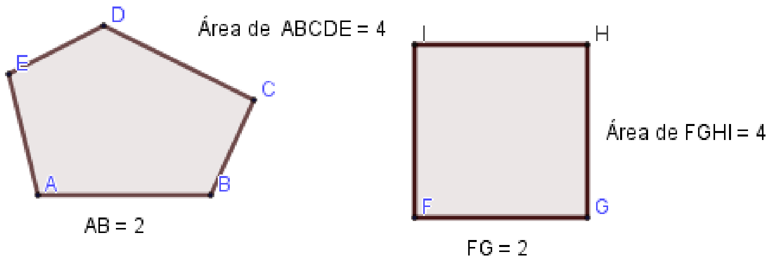
2 CONTEXTO HISTÓRICO

Os escritos de Apolônio[1] sobre as cônicas foram de fundamental importância para o desenvolvimento de conceitos relacionados à matemática e à geometria. Desde as suas contribuições, o entendimento e a aplicação das cônicas reverberaram em diversas áreas. Em Eves (2004), o autor menciona que os nomes parábola, elipse e hipérbole derivam do método euclidiano de aplicação de áreas. Esses termos refletem as diferentes maneiras de se relacionar áreas conforme ensinado por Euclides. Antes dos trabalhos de Apolônio de Perga, essas curvas não eram categorizadas dessa forma, uma vez que não havia uma conexão explícita com a aplicação de áreas na definição das cônicas.

Tem-se que Menécmo e Aristeu, matemáticos da escola de Eudoxo, descobriram as cônicas ao estudar o problema da duplicação do cubo. Para eles, as cônicas eram obtidas a partir interseção de um cone com o plano perpendicular à sua geratriz. Para Menécmo e Aristeu, Euclides e Arquimedes, os três tipos de cônicas, posteriormente denominadas por Apolônio de elipse, parábola e hipérbole, eram obtidas, respectivamente, quando o ângulo do vértice do cone era agudo, reto ou obtuso.

A geometria grega, amiúde utilizava-se das *aplicações de área* (Figura 1), cuja definição é: aplicar uma figura (poligonal) a uma reta dada é construir a figura dada de tal maneira que o segmento de reta seja um de seus lados. Por exemplo, seja FG um segmento de reta, aplicar um paralelogramo ao segmento FG, corresponde a construção de um paralelogramo $FGHI$ em que FG é um dos lados. Pode-se ainda fazer algumas exigências à figura construída. Isto é, considere também um polígono $ABCDE$, aplicar ao segmento FG um paralelogramo que tem área igual a $ABCDE$ corresponde à construção de um paralelogramo $FGHI$ em que FG é um dos lados. Além disso, pode se definir que o paralelogramo tenha um ângulo IFG com valor predefinido. Neste trabalho, a figura dada será um retângulo, ou seja, o ângulo IFG é reto.

Figura 1 – Aplicação de área.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

[1] Matemático grego que viveu no século III a.C., conhecido por seus estudos sobre as cônicas.

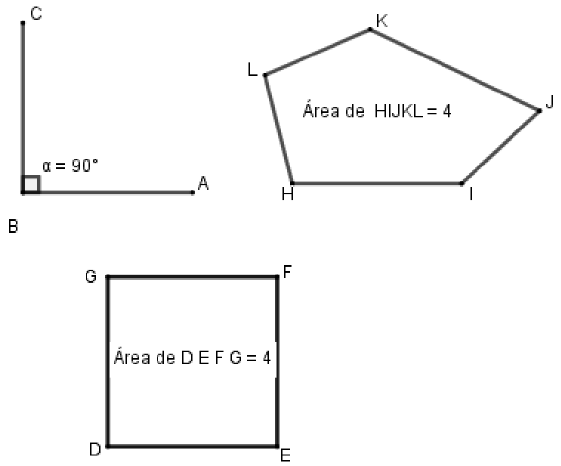
As aplicações de áreas usados pelos gregos eram basicamente:

1. Aplicação parabólica.
2. Aplicação elíptica.
3. Aplicação hiperbólica.

2.1 APLICAÇÃO PARABÓLICA

De acordo com Roque; Carvalho (2012), uma aplicação parabólica (Figura 2), consiste em aplicar a um segmento DE um paralelogramo $DEFG$ que tenha área igual a uma figura dada $HIJKL$, com um ângulo especifico ABC. Aqui neste material, ainda conforme os autores citados, utilizar-se-á somente o caso de aplicar um retângulo a um segmento, ou seja, construir um retângulo, de tal forma que um dos lados é um segmento dado e a área é igual a de uma figura poligonal dada.

Figura 2 – Aplicação parabólica.

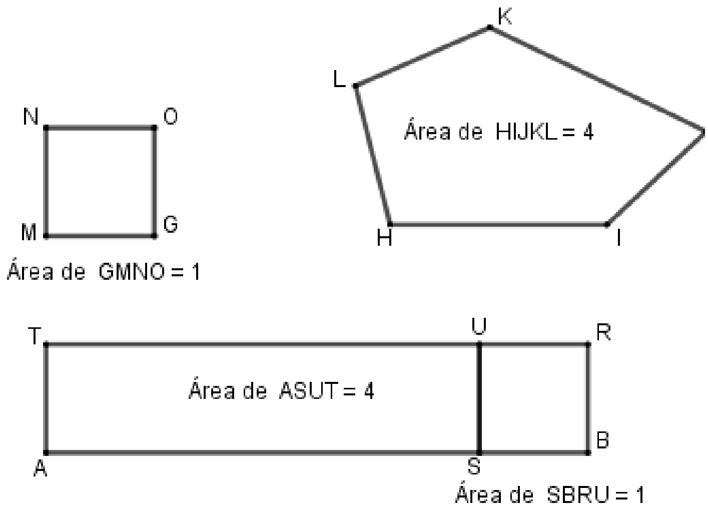


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

2.2 APLICAÇÃO ELÍPTICA

O método euclidiano de aplicações de áreas elípticas, também chamada de aplicação com falta, consiste em aplicar a um segmento de reta AB, um paralelogramo, tomando como referência um ângulo dado, área igual a de um polígono dado, e de tal maneira que o que falta para completar a figura a todo o segmento AB seja um paralelogramo semelhante a um paralelogramo dado. Em Roque; Carvalho (2012), os autores chamam a atenção para o caso a ser abordado, o do retângulo, ver Figura 3, em que ele formula: Dado o polígono $HIJKL$, pede-se que seja construído o retângulo $ASUT$, com área igual a de $HIJKL$, e tal que $SBRU$ seja um quadrado dado. O quadrado *SBRU* é o que falta para que $ASUT$ tenha *AB* como lado, isto é, esteja aplicado a *AB*.

Figura 3 – Aplicação elíptica ou por falta.

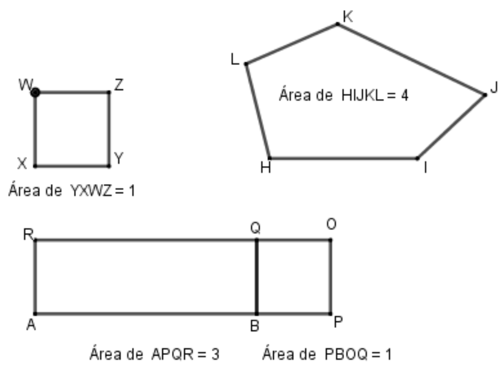


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

2.3 APLICAÇÃO HIPERBÓLICA

Uma aplicação hiperbólica, também chamada de aplicação com excesso, consiste em aplicar a um segmento de reta *AB*, um paralelogramo, com um ângulo dado, uma área igual a de um polígono dado, e de tal maneira que ele excede o segmento *AB* por um paralelogramo semelhante a um paralelogramo dado. Em Roque; Carvalho (2012), os autores chamam a atenção para o caso a ser abordado, o do retângulo, ver Figura 4, em que ele formula: dado o polígono $HIJKL$, pede-se que seja construído o retângulo *APOR*, com área igual a de $HIJKL$, e tal que *BPOQ* seja um quadrado dado. O quadrado *BPOQ* é o que falta para que *ABQR* tenha *AB* como lado, isto é, esteja aplicado a *AB*.

Figura 4 – Aplicação hiperbólica ou por excesso.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Os estudos dedicados às aplicações de áreas desempenharam um papel fundamental no desenvolvimento dos conceitos preliminares que eventualmente levaram ao estudo das cônicas. Entre esses estudos, destacam-se o problema da duplicação do cubo, o qual será explorado na próxima seção.

2.4 O PROBLEMA DA DUPLICAÇÃO DO CUBO

De acordo com Eves (2004), nos primeiros 300 anos da matemática grega, por volta de 600 a 300 a.C. houve basicamente três linhas de desenvolvimento matemático. A primeira linha, organizada nos Elementos, teve como precursores os pitagóricos e, posteriormente, figuras como Hipócrates, Eudoxo, Teodoro, Teeteto e outros. O segundo desenvolvimento da matemática grega teve início com noções relacionadas aos infinitésimos e ao infinito, além de processos de somatórios que foram elaborados com a invenção e o desenvolvimento do cálculo nos tempos modernos. Na terceira linha de desenvolvimento surge a geometria superior ou geometria das curvas, a qual se acredita ter surgido da necessidade de resolver três famosos problemas.

- Duplicação do cubo.
- Trissecção do ângulo.
- Quadratura do círculo.

Esses três problemas foram importantes para o avanço dos estudos sobre as cônicas e curvas cúbicas. Os esforços para resolver essas proposições levaram a descobertas significativas, que foram posteriormente refinadas, resultando em conclusões importantes para o desenvolvimento da matemática.

> A importância desses problemas reside no fato de que eles não podem ser resolvidos, a não ser aproximadamente, com régua e compasso, embora esses instrumentos sirvam para a resolução de muitos outros problemas de construção. A busca ingente de soluções para esses problemas influenciou profundamente a geometria grega e levou a muitas descobertas frutíferas, como as secções cônicas, muitas curvas cúbicas e quadráticas e várias curvas transcendentes. Um produto muito posterior foi o desenvolvimento de partes da teoria das equações ligadas a domínios de racionalidade, números algébricos e teoria dos grupos. Somente no século XIX, mais de 2000 anos depois de os problemas terem sido concebidos, se estabeleceu a impossibilidade das três construções, sob a limitação autoimposta de se usarem apenas régua e compasso (EVES, 2004, p. 134).

Nesta dissertação, focaremos na análise das questões relacionadas à duplicação do cubo. Este problema é considerado por diversos historiadores matemáticos como precursor para o desenvolvimento dos conceitos relacionados às cônicas.

O problema da duplicação do cubo é uma questão geométrica que teve origem na Grécia antiga. Consiste essencialmente em encontrar um cubo cujo volume seja o dobro de um cubo dado, utilizando apenas régua e compasso.

Menecmo (380-320 a.C.), aluno da escola de Eudoxo, obteve as cônicas no estudo do problema de médias proporcionais duplas (MOL, 2013).

Definição 1. *Diz-se que x e y estão em média proporcional dupla em relação a dois segmentos de reta a e b se a / x = x / y = y / b, equivalendo ao conjunto de equações*

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx, \ e \quad xy = ab. \tag{2.1}$$

Hipócrates de Quíos, um século antes havia mostrado que a duplicação do cubo equivalia ao problema de encontrar x e y em média proporcional dupla em relação a a e b, tais que $b = 2a$. De fato, nesse caso tem $a/x = x/y = y/b$ o que equivale ao conjunto de equações

$$y^3 = yy^2 = \tfrac{x^2}{a}bx = 2x^3$$

e mais, de (2.1) temos que

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx = 2ax$$

dessas proporções resulta que

$$x^2 = ay \quad \text{e} \quad y^2 = 2ax$$

eliminando-se y, obtém-se que

$$x^3 = 2a^3.$$

Assim, x é a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo de aresta a.

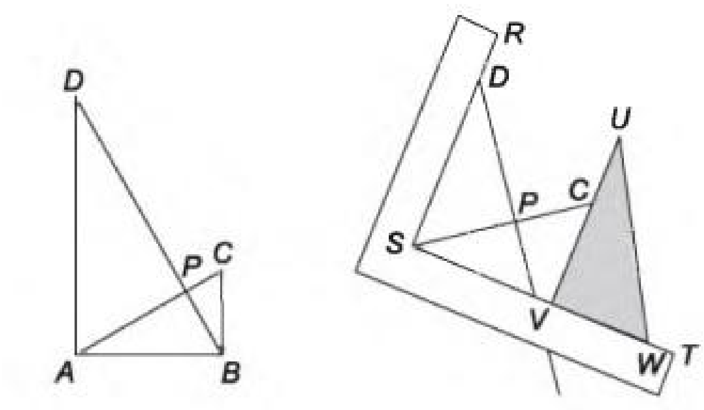
Diversos matemáticos empenharam-se na resolução do problema da duplicação do cubo, utilizando apenas régua e compasso. Esses esforços foram fundamentais para o desenvolvimento dos conceitos relacionados às cônicas, resultando em uma variedade de possibilidades e soluções geométricas.

> Uma das mais antigas, e certamente uma das mais notáveis, na forma de uma solução por geometria superior, foi dada por Arquitas (c. 400 a.C.). Sua solução consiste em achar um ponto de intersecção de um cilindro circular reto, um toro de diâmetro interior zero e um cone circular reto! Essa solução lança alguma luz sobre a extensão pouco comum que a geometria deve ter atingido naqueles tempos remotos. A solução de Eudoxo (c. 370 a.C.) se perdeu. Menaecmo (c. 350 a.C.) deu duas soluções do problema e, tanto quanto se sabe, inventou as

> secções cônicas para esse propósito. Atribui-se a Eratóstenes (c. 230 a.C.) uma solução posterior usando dispositivos mecânicos e outra, por volta da mesma época, a Nicomedes. Uma solução ainda posterior foi oferecida por Apolônio (c. 225 a.C.). Dioclés (c. 180 a.C.) inventou uma curva chamada cissoide com o mesmo objetivo. E, obviamente, descobriram-se modernamente muitas soluções mediante curvas planas superiores (EVES, 2004, p. 135).

Umas das diversas tentativas, fora atribuída a Eutócio, onde são considerados dois triângulos (Figura 5) CBA e DAB, retos em B e A, respectivamente, de maneira que o cateto AB seja comum. É suposto que as hipotenusas AC e BD se interceptem perpendicularmente em P e que os triângulos CPB, BPA e APD são semelhantes.

Figura 5 – Duplicação de Eutócio.



Fonte: Eves (2004).

Vê-se, de acordo com a Figura 5, que $\frac{PC}{PB} = \frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PD}$.

Assim, PB e PA são duas médias proporcionais entre PC e PD, mostrando que o problema da duplicação de Eutócio fica resolvido desde que se possa construir uma figura tal que $PD = 2PC$.

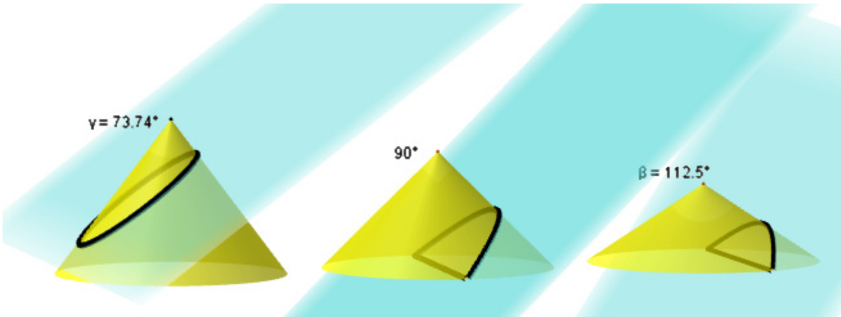
Na Figura 5, a representação dos triângulos da direita é o resultado da descrição, conforme Eves (2004), dos procedimentos mecânicos para obtenção da figura mais a esquerda. Esses passos são:

- Trace duas retas perpendiculares interceptando-se em P e marque PC e PD sobre elas, com $PD = 2(PC)$.
- Coloque um esquadro, de lados internos RS e WS, sobre a figura de modo que SR passe por D e o vértice S do ângulo reto fique no prolongamento de CP.
- Faça escorregar sobre ST um triângulo retângulo UVW com o cateto VW no lado ST, até que VU passe por C.
- Manipule o aparato até que V esteja no prolongamento de DP.

2.5 AS CÔNICAS DE APOLÔNIO

Como mencionado anteriormente, as cônicas descritas por alguns matemáticos da escola de Eudoxo eram obtidas pela interseção de um cone com um plano perpendicular à sua geratriz. Dependendo do ângulo do vértice do cone, diferentes tipos de cônicas eram gerados. Na época, os gregos definiam os ângulos como reto, menor que reto e maior que reto, equivalentes atualmente a ângulo reto, agudo e obtuso, respectivamente. Assim, se o ângulo do vértice fosse agudo, reto ou obtuso, obteríamos, respectivamente, uma elipse, uma parábola e uma hipérbole (com apenas um ramo), conforme representado na Figura 6.

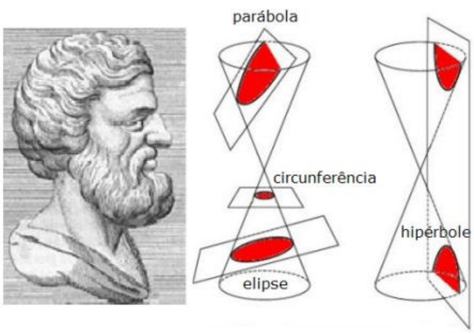
Figura 6 – Plano perpendicular a geratriz.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Apolônio foi um reconhecido astrônomo e um grande estudioso da matemática. Através dos seu escritos, *Seções Cônicas*, ficou conhecido pelos seus contemporâneos como "o grande geômetra". Apolônio, conforme Eves (2004), elaborou nos seus oito livros sobre as cônicas, cerca de 400 proposições. Os seus estudos superaram os trabalhos de grandes matemáticos como Menecmo, Aristeu e Euclides. Apolônio foi o primeiro a conceber as cônicas como interseções de uma mesma superfície cônica circular, não necessariamente reta, cortada por planos de inclinações diferentes, o que significa que variando o ângulo de inclinação poderíamos ter diferentes tipos de cônicas (ver Figura 7).

Figura 7 – Apolônio e suas cônicas.



Fonte: (LINO, 2018).

Apolônio definiu as secções cônicas a partir de um cone circular duplo, reto ou oblíquo. Essa definição é semelhante às utilizadas nos tempos modernos. As obras de Apolônio sobre as cônicas exerceu e exerce influência no desenvolvimento da matemática, sobretudo no que concerne a geometria analítica. Definições e terminologias como foco, diretriz, dentre outras, ainda são corriqueiramente utilizadas nos dias atuais.

2.6 DO SURGIMENTO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

A geometria analítica consiste em um método algébrico para discorrer sobre a geometria. Há muitas divergências sobre quem foi o pai da geometria analítica, e onde se originou. Eves (2004) destaca que os gregos antigos fizeram incansáveis esforços sobre a álgebra geométrica e que os conceitos sobre as coordenadas foram usados pelos egípcios e romanos na agrimensura, e pelos gregos na construção dos mapas. Além disso, a favor dos gregos, pesa-se o fato de que as ideias aparentemente desenvolvidas por Menecmo sobre as equações cartesianas das cônicas tenham sido o cerne da geometria das cônicas desenvolvidas por Apolônio. Dentre tantos candidatos, parece consenso entre os historiadores que Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650), matemáticos franceses, são os precursores essencialmente da geometria analítica. Eves (2004) menciona que a essência desse campo da matemática reside na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente.

Nos seus escritos, Descartes (Figura 8)

> escreveu um tratado filosófico sobre a ciência universal sob o título de Discours de la Méthode pour Bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences (Discurso do método para bem conduzir a razão e procurar a verdade nas ciências); acompanhavam esse tratado três apêndices: La dioptrique, Les météores e Lagéométrie. O Discours, com seus apêndices, foi publicado em 1637; a contribuição de Descartes à geometria analítica aparece no último desses três apêndices (EVES, 2004, p. 383).

Figura 8 – René Descartes.

Fonte: Eves (2004).

Com a obra “*"LA GÉOMÉTRIE”*, a geometria de Descartes torna-se sinônimo de analítica, porém, Darela; Cardoso (2011) mencionam que

> o direcionamento fundamental de Descartes era muito diferente daquele dos textos modernos, e que objetivo é geralmente uma construção geométrica, e não necessariamente a redução da geometria à álgebra. A obra de Descartes é com demasiada frequência descrita simplesmente como aplicação da álgebra à geometria, ao passo que, na verdade, poderia sem bem caracterizada como sendo a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica (DARELA; CARDOSO, 2011, p. 153).

Em síntese, percebe-se em *"LA GÉOMÉTRIE”* que há uma correspondência geométrica para operações algébricas, conforme título da primeira seção; “como os cálculos de aritmética se relacionam com operações de geometria”. É inegável a importância da obra de Descartes para a geometria analítica, sobretudo, pelo estabelecimento da correspondência entre processos algébricos com geométricos. Todavia, a ideia disseminada sobre plano cartesiano e o seu sistema de coordenadas não necessariamente são assinaturas de Descartes.

> Descartes deve ter deixado claro quão longe estavam os pensamentos relacionados com as considerações práticas, hoje associadas, frequentemente, ao uso de coordenadas. Ele não estabelecia um sistema de coordenadas a fim de localizar pontos como um medidor de terras ou um geógrafo, nem pensava em coordenadas como um par de números, sendo que a expressão produto cartesiano não tem tempo específico de uso (DARELA; CARDOSO, 2011, p. 153).

Outro renomado candidato a precursor no campo da geometria analítica é Pierre de Fermat (Figura 9). Uma explanação detalhada sobre Pierre De Fermat já constituiria uma dissertação em si. Fermat, sendo um discreto advogado, dedicou grande parte de seu tempo livre ao estudo da matemática, tornando-se notável por sua abordagem inovadora na resolução de problemas geométricos por meio de métodos algébricos.

Figura 9 – Pierre De Fermat.

Fonte: Eves (2004).

Em Eves (2004), o autor evidencia que o fato de Fermat ter publicado muito pouco durante sua vida não diminuiu sua influência sobre os matemáticos de sua época. Suas contribuições em diversos ramos da matemática o tornaram o maior matemático francês do século XVII. Neste trabalho, destacaremos algumas de suas contribuições para o desenvolvimento da geometria analítica.

Em 1637, Fermat discute no manuscrito, Introdução aos Lugares Planos e Sólidos, a reconstrução dos Lugares de Apolônio, apresentando uma teoria sobre os lugares geométricos, demonstrando que as cônicas estudas por Menecmo e Apolônio poderiam ser vistas simplificadamente através de equações.

A geometria de Fermat estava mais próxima de uma a abordagem clássica baseada em propriedades e relações geométricas, introduzindo paulatinamente métodos algébricos em sua abordagem, utilizando coordenadas para representar grandezas geométricas. Ele explorou a resolução de problemas geométricos por meio de técnicas algébricas, associando quantidades algébricas a entidades geométricas.

Conforme indica Darela; Cardoso (2011), a geometria vislumbrada por Fermat era um tanto mais próxima da atual, referindo-se às ordenadas usualmente tomadas perpendicularmente ao eixo das abscissas.

Desde as contribuições iniciais de Fermat e Descartes até os dias atuais, a geometria analítica passou por um desenvolvimento significativo. Em síntese,

> a geometria analítica tal como a conhecemos atualmente consiste em duas associações recíprocas: (i) dado um lugar geométrico, encontrar a equação que seus pontos satisfazem; e (ii) dada uma equação, encontrar o lugar geométrico dos pontos que a satisfazem. Descartes estudou o primeiro problema, mas Fermat foi pioneiro em atacar o segundo. Logo no princípio de sua Introduçao, enuncia: "Sempre que em uma equaçao final, duas quantidades desconhecidas são encontradas, temos um lugar geométrico e a extremidade de uma delas descreve uma linha, reta ou curva" (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 203).

A colaboração de Descartes e Fermat, foi essencial para o desenvolvimento da geometria analítica. A abordagem de Descartes proporcionou um meio eficaz de visualizar e manipular a geometria, enquanto Fermat adicionou a complexidade das equações, permitindo uma análise das propriedades geométricas.

A aplicação prática da geometria analítica nos dias correntes se estende por diversos campos dos saberes, desde a física, engenharia até a computação gráfica. A representação de objetos geométricos por meio de fórmulas matemáticas tornou-se uma ferramenta essencial na resolução de problemas práticos e no avanço da ciência.

Assim, a importância de Descartes e Fermat na geometria analítica transcende o contexto histórico, continuando a influenciar a maneira como compreendemos e aplicamos conceitos geométricos na atualidade. Suas contribuições fundamentais são um testemunho duradouro da interconexão entre a álgebra e a geometria, destacando a relevância contínua dessa disciplina para a evolução do pensamento matemático.

No próximo capítulo, enfocaremos nas definições e contextualizações analíticas da Elipse, Hipérbole e Parábola.

3 ELIPSE, HIPÉRBOLE E PARÁBOLA. UMA PERSPECTIVA ANALÍTICA.

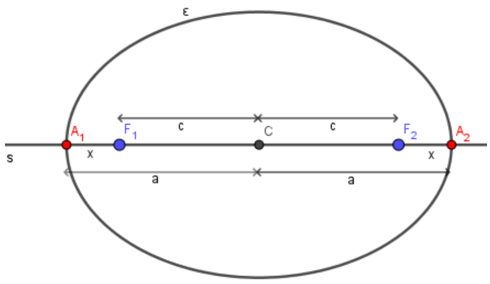
3.1 ELIPSE

Definição 2. *Considere F_1 e F_2, com $F_1 \neq F_2$, pontos do plano π e seja $2c > 0$ a distância entre esses pontos. Tomando, a, um número real tal que $a > c$, chamamos de elipse ε, o lugar geométrico dado pelo conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a $2a$, isto é,*

$$\varepsilon = \{P \,|\, d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a\}\,. \tag{3.1}$$

Observações (ver Figura 10).

Figura 10 – Elementos da elipse.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

- Os pontos F_1 e F_2 são chamados de focos da elipse.
- A reta que contém os focos F_1 e F_2 denomina-se reta focal.
- A distância focal é o valor $2c$.
- O ponto médio do segmento focal é o centro da elipse.
- A intersecção entre a elipse ε e a reta focal consiste em dois pontos, A_1 e A_2.

O primeiro fato interessante é que $\overline{F_1F_2} \cap \varepsilon = \varnothing$, pois se $P \in \overline{F_1F_2}$ então $P \notin \varepsilon$, já que

$$d(F_1F_2) = d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2c \,<\, 2a.$$

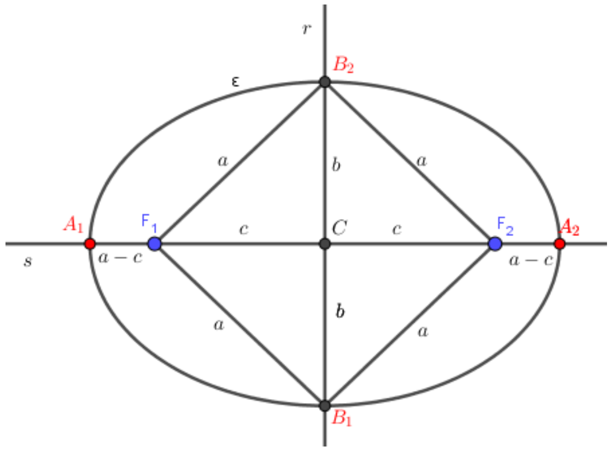
Agora tome $d(A_2,F_2) = d(A_1,F_1) = x$. Como $A_2 \in \varepsilon$, temos:

$$2a = d(A_2,F_1) + d(A_2,F_2) = (x + 2c) + x$$

e assim $x = a - c$, representa as distâncias dos vértices da elipse, A_1 e A_2 aos focos F_1 e F_2 respectivamente.

A reta r, reta não focal, é perpendicular a reta focal, passa pelo centro C e intersecta a elipse exatamente nos pontos B_1 e B_2, que são os vértices da elipse sobre a reta r (ver Figura 11).

Figura 11 – Elementos da elipse e reta não focal.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Como r é a mediatriz de $\overline{F_1F_2}$, se $B \in r$ então $d(B,F_1) = d(B,F_2)$.

Se $B \in \varepsilon$ então $d(B,F_1) + d(B,F_2) = 2a$. Segue que $d(B,F_1) = d(B,F_2) = a$, e mais, $r \cap \varepsilon = \{B_1, B_2\}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras, tem-se que $b^2 = a^2 - c^2$, e assim B_1 e B_2 são os pontos de ε que estão a uma distância $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ do centro C.

- O segmento $\overline{B_1B_2}$ de comprimento $2b$ é o eixo não focal.
- A distância do centro C aos vértices, A_1 e A_2, na reta focal é o número real a.
- A distância do centro C aos vértices, B_1 e B_2, na reta não focal é o número real b.
- O número real c é a distância do centro aos focos F_1 e F_2.
- A excentricidade da elipse é dada por $e = \frac{c}{a}$. Observe que $0 \leq e < 1$. Quanto menor a excentricidade mais a elipse se aproximará de uma circunferência.

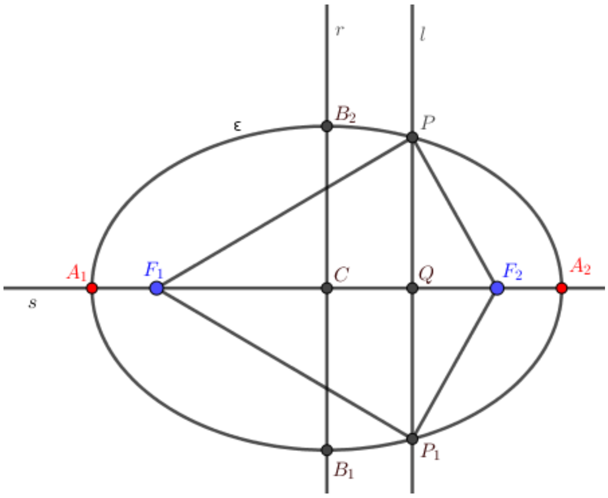
3.1.1 As propriedades das simetrias da Elipse

Proposição 3.1. *A elipse é simétrica em relação à reta focal.*

Demonstração. De fato, sejam $P \in \varepsilon$ e P_1 o seu simétrico em relação à reta focal s. Como $\overline{PQ} = \overline{P_1Q}$ por simetria, $\overline{F_2Q} = \overline{F_2Q}$ já que são segmentos comuns e $P\hat{Q}F_2 = P_1\hat{Q}F_2$, já que são retos, tem-se que os triângulos PF_2Q e P_1F_2Q são congruentes pelo caso LAL, o mesmo ocorrendo com os triângulos PF_1Q e P_1F_1Q, pois $\overline{PQ} = \overline{P_1Q}$ por simetria, $\overline{F_1Q} = \overline{F_1Q}$ já que são segmentos comuns e $P_1\hat{Q}F_1 = P\hat{Q}F_1$, já que são retos. Em particular tem-se $\overline{F_1P} \cong \overline{F_1P_1}$ e $\overline{F_2P} \cong \overline{F_2P_1}$ (ver Figura 12). Logo,

$$d(F_1,P) + d(F_2,P) = d(F_1,P_1) + d(F_2,P_1) = 2a. \qquad \square$$

Figura 12 – Simetria em relação à reta focal.



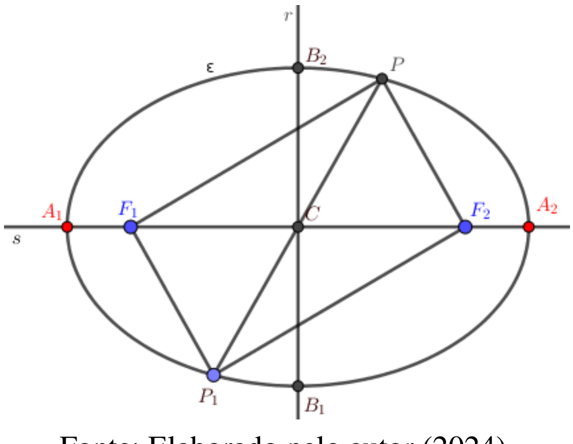
Fonte:Elaborado pelo autor (2024).

Analogamente prova-se a simetria em relação à reta não focal.

Proposição 3.2. *A elipse é simétrica com relação à origem.*

Demonstração. De fato, sejam $P \in \varepsilon$ e P_1 o seu simétrico em relação ao centro C (ver Figura 13).

Figura 13 – Simetria em relação à origem.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Como $\overline{PC} = \overline{P_1C}$ por simetria, $\overline{F_1C} = \overline{F_2C}$ pois C é ponto médio de $\overline{F_1F_2}$ e $P\hat{C}F_2 = P_1\hat{C}F_1$, já que são opostos pelo vértice, tem-se que os triângulos PCF_2 e P_1CF_1 são congruentes pelo caso LAL. O mesmo acontece com os triângulos F_1CP e F_2CP_1, pois $\overline{PC} = \overline{P_1C}$ por simetria, $\overline{F_1C} = \overline{F_2C}$ pois C é ponto médio de $\overline{F_1F_2}$ e $F_1\hat{C}P = P_1\hat{C}F_2$, já que são opostos pelo vértice. Segue que $\overline{F_1P} \cong \overline{F_2P_1}$ e $\overline{F_2P} \cong \overline{F_1P_1}$. Logo,

$$d(F_1,P) + d(F_2,P) = d(F_1,P_1) + d(F_2,P_1) = 2a$$

o que implica que $P_1 \in \varepsilon$. $\square$

3.1.2 Elipse e sua forma canônica.

Uma elipse pode estar situada em diversas posições no plano. Podemos ter a elipse,

- Com centro na origem e reta focal no eixo OX ou com centro na origem e reta focal no eixo OY.
- Elipse com centro sendo um ponto do plano com sistema de coordenadas paralelo aos eixos OX e OY.
- Elipse com centro sendo um ponto do plano com sistema de coordenadas não paralelo (inclinado) aos eixos OX e OY.

Neste capítulo discorreremos o primeiro dos itens acima. As demais demonstrações podem ser encontradas em (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2017).

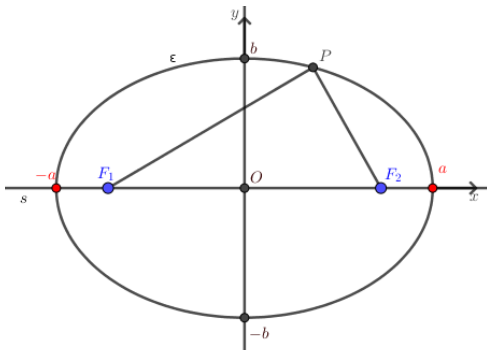
Elipse com centro na origem e reta focal no eixo OX

Considere um sistema de eixos ortogonais OXY e $P \in \varepsilon$, com

$F_1 = (-c,0), F_2 = (c,0),\ \ A_1 = (-a,0), A_2 = (a,0),\ \ B_1 = (-b,0), B_2 = (b,0)$

sendo $0 \leq c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Figura 14 – Elipse centro na origem e reta focal sobre o eixo OX.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Conforme a Figura 14, tem-se

$$
\begin{aligned}
P=(x,y)\in\varepsilon &\Leftrightarrow d(F_1,P)+d(F_2,P)=2a\\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
&\Leftrightarrow (x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2\\
&\Leftrightarrow x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2\\
&\Leftrightarrow 4xc=4\left(a^2-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)\\
&\Leftrightarrow a^2-xc=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
&\Leftrightarrow (a^2-xc)^2=a^2((x-c)^2+y^2)\\
&\Leftrightarrow a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2\\
&\Leftrightarrow a^4-a^2c^2=a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2\\
&\Leftrightarrow a^2(a^2-c^2)=(a^2-c^2)x^2+a^2y^2\\
&\Leftrightarrow a^2b^2=b^2x^2+a^2y^2
\end{aligned}
$$

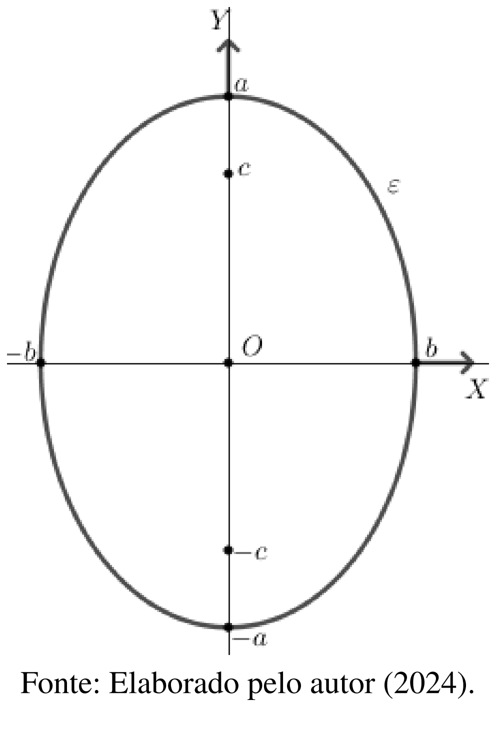
sendo esta última igualdade equivalente à forma canônica da elipse, com $a>b$, ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3.2}$$

Elipse com centro na origem e reta focal no eixo OY.

De acordo com a Figura 15 , temos:

Figura 15 – Elipse centro na origem e reta focal no eixo OY.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

- $F_1 = (0, -c) \qquad F_2 = (0, c).$
- $A_1 = (0, -a) \qquad A_2 = (0, a).$
- $B_1 = (-b, 0) \qquad B_2 = (b, 0).$

Analogamente à dedução da equação (3.2), chegamos à equação da elipse centrada sobre o eixo OY:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{3.3}$$

3.1.3 A propriedade refletora da Elipse

A elipse possui uma propriedade interessante, conhecida como Propriedade Refletora, a qual diz o seguinte:

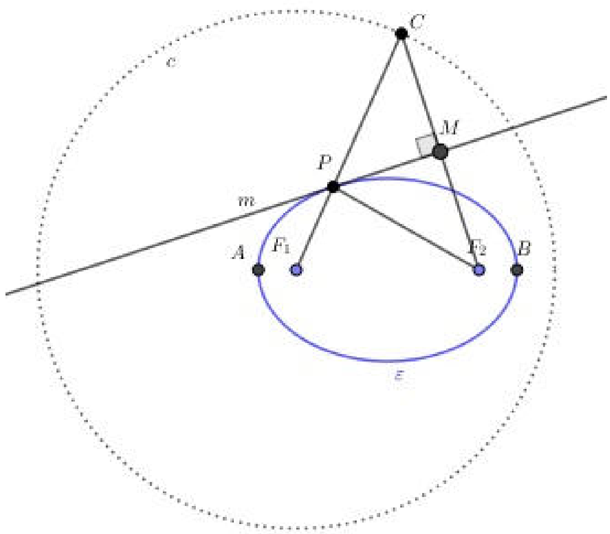
Teorema 3.1. *Dado uma elipse ε e um ponto $P \in \varepsilon$, com F_1 e F_2, focos da elipse. Tem-se que os ângulos formados entre a reta tangente à elipse no ponto P e os segmentos, $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ são iguais.*

Antes de demonstrarmos a propriedade refletora da elipse, iremos conceituar alguns resultados que serão usados mais adiante.

Considere a elipse ε com eixo focal AB, de comprimento $2a$ e focos F_1 e F_2.

Seja P, um ponto qualquer da elipse e considere uma circunferência c com centro em F_1 e raio $\overline{AB}$. Trace a semirreta F_1P que interseccionará a circunferência c no ponto C. Em seguida trace o segmento F_2C. Traçando a mediatriz do segmento F_2C (ver Figura 16), obteremos a reta m.

Figura 16 – Mediatriz e tangente à uma elipse.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Tem-se que a reta m é tangente à elipse no ponto P.

De fato, a reta m será tangente à elipse ε no ponto P se P for o único ponto de interseção entre m e a elipse ε. Note que $\overline{F_1C} = \overline{AB} = 2a$.

Suponhamos que exista (ver Figura 17) P_1 diferente de P que pertença a mediatriz m e a elipse ε, então $d(C,P_1) = d(F_2,P_1)$. Como $P \in \varepsilon$, temos:

$d(F_1,P) + d(F_2,P) = 2a = d(F_1,P_1) + d(F_2,P_1) \Rightarrow$

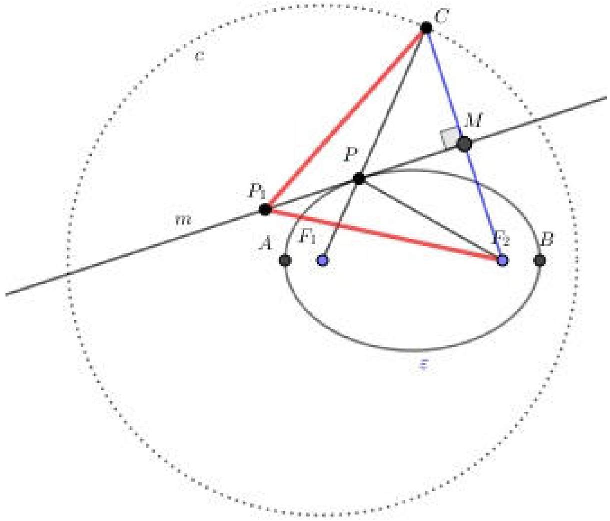
$d(F_1,P_1) + d(P_1,C) = 2a$

O que é absurdo, pois pela desigualdade triangular;

$2a = d(F_1,C) < d(F_1,P_1) + d(P_1,C)$.

Logo, P é único.

Figura 17 – Unicidade do ponto entre a tangente e a elipse.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Agora estamos aptos a provar a propriedade refletora da elipse.

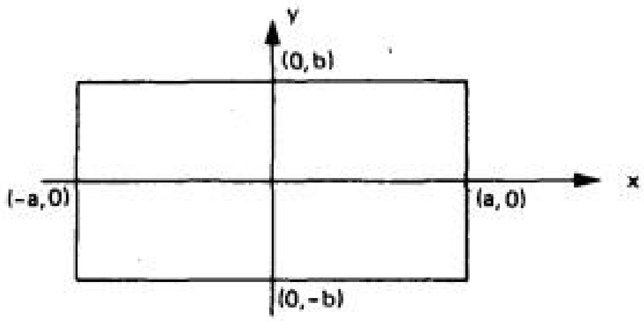
Demonstração. (do Teorema 3.1).

Observe a Figura 17. Como $P \in \varepsilon$ tem-se que $d(F_1,P) + d(F_2,P) = 2a$ e como $d(F_1,C) = 2a$ tem-se que $d(P,C) = d(P,F_2)$ e assim o triângulo F_2PC é isósceles, logo $\overline{F_2M} = \overline{MC}$. Pelo caso LAL os triângulos F_2PM e CPM são congruentes e portanto $F_2\hat{P}M = C\hat{P}M$. Mais ainda, o ângulo entre a reta m e o segmento PF_1 é oposto pelo vértice ao $C\hat{P}M$, portanto os ângulos formados entre a reta tangente à elipse no ponto P e os segmentos, $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ são iguais, como queríamos demonstrar.

$\square$

3.1.4 **O esboço da Elipse centrada na origem e com focos sobre o eixo** OX

Figura 18 – Simetria em relação à reta focal.



Fonte: (BOULOS; CAMARGO, 1987).

Vimos na Seção 3.1.1 que a elipse é simétrica em relação aos eixos OX e OY e ao centro dos eixos coordenados. Desta forma, se $P = (x,y) \in \varepsilon$ então os pontos $(x,-y);(-x,-y);(-x,y) \in \varepsilon$ e, além disso

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} \leq 1 \Rightarrow |x| \leq a.$$

De modo análogo, obtém-se que $|y| \leq b$.

Logo, percebe-se que a elipse está contida no retângulo $[-a,a]\times[-b,b]$ (ver Figura 18).

As intersecções da elipse com o eixo OX são obtidas fazendo $y = 0$. Neste caso, teremos

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \pm a$$

e portanto os pontos $A_1 = (-a,0)$ e $A_2 = (a,0)$ são tais interseções.

Analogamente, as intersecções da elipse com o eixo OY são obtidas fazendo $x = 0$. Assim,

$$\frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow y = \pm a$$

fornecendo os pontos $B_1 = (-b,0)$ e $B_2 = (b,0)$. Mais ainda, segue da Equação (3.2) que

$$\frac{y^2}{b^2} = 1-\frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right) \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Devido às simetrias já abordadas, restringiremos a análise apenas ao primeiro quadrante.

Considere $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Então, como

$$f'(x) = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}} < 0 \quad \forall x \in (0,a)$$

segue que f é decrescente em $[0,a]$. Além disso, observando que

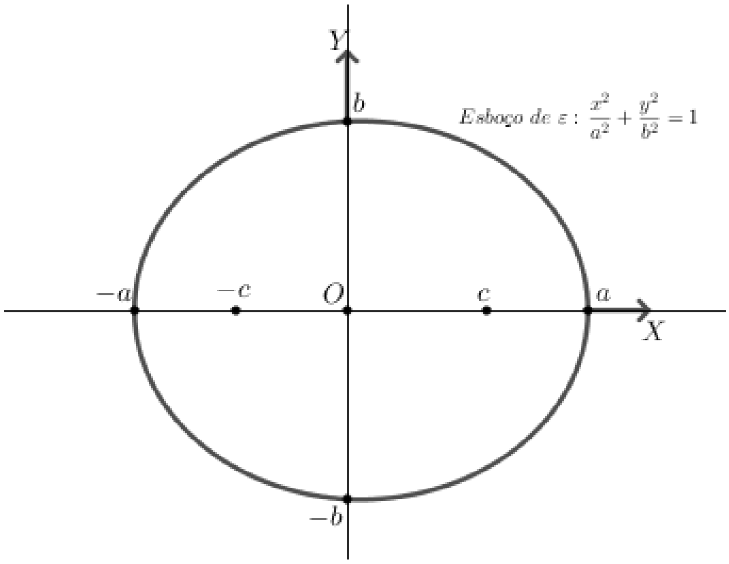
$$f''(x) = -\frac{ba}{(a^2-x^2)^{3/2}} < 0 \quad \forall x \in (0,a)$$

concluímos que fé uma função côncava[1] em $[0,a]$.

[1] Dizemos que uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é côncava se a derivada de segunda ordem de f é menor que zero.

Assim o gráfico da elipse com reta focal sobre o eixo *OX* é dado pela Figura 19 abaixo:

Figura 19 – Esboço do gráfico da elipse com reta focal sobre o eixo *OX*.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

De modo análogo obtém-se o gráfico da elipse com reta focal no eixo *OY* (Figura 15).

3.2 A HIPÉRBOLE

Definição 3. *Sejam F_1 e F_2 pontos do plano π que distam entre si $2c > 0$ e seja a tal que $a < c$. Chamamos de hipérbole H, o conjunto dos pontos P do plano π para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual ao real $2a > 0$, isto é,*

$$H = \{P \mid |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a\}. \tag{3.4}$$

Observações:

- Os pontos F_1 e F_2 são chamados de focos da hipérbole.
- A reta que contém os focos F_1 e F_2 denomina-se reta focal. Seja l esta reta.
- A distância focal é o valor $2c$.
- O ponto médio do segmento focal é chamado de centro da hipérbole.

Provaremos a seguir que a intersecção entre a hipérbole H e a reta focal consiste exatamente em dois pontos, A_1 e A_2.

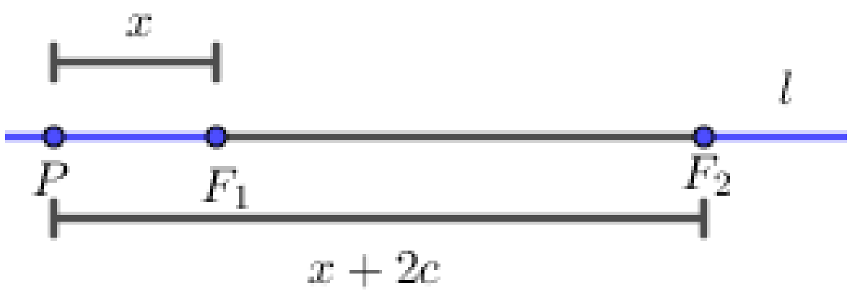
Tem-se que, se $P \in l - \overline{F_1F_2}$ então $P \notin H$, pois

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = |x - (x+2c)| = 2c > 2a.$$

Na Figura 20, consideremos P à esquerda do foco F_1 com $\overline{PF_1} = x, 0 < x < c$ e seja $A_1 \in \overline{F_1F_2} \cap H$ tal que $d(A_1,F_1) = x$ com $0 < x < c$. Então $d(F_1,F_2) = 2c$, e portanto

$$\begin{aligned} |d(A_1,F_1) - d(A_1,F_2)| = 2a &\Leftrightarrow |x - (2c - x)| = 2a \\ &\Leftrightarrow |2x - 2c| = 2a \\ &\Leftrightarrow x = c - a. \end{aligned}$$

Figura 20 – Construção dos elementos da Equação (3.4).

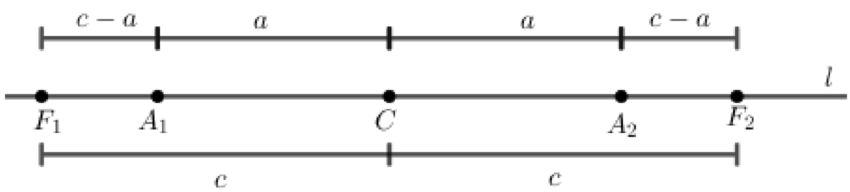


Fonte: Desenvolvido pelo autor (2024).

Portanto, o ponto A_1 de $\overline{F_1F_2}$ distante $c - a$ de F_1 pertence a H. Analogamente verifica-se que o ponto A_2 de $\overline{F_1F_2}$, distante $c - a$ de F_2 também pertence a H, caso P esteja à direita de F_2, com $\overline{PF_2} = x$.

O segmento $\overline{A_1A_2}$ é chamado o eixo focal e seu comprimento é $d(A_1,A_2) = 2a$. O ponto médio C do eixo focal A_1A_2 é chamado o centro da hipérbole (Figura 21).

Figura 21 – Construção dos elementos da hipérbole.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

A reta l' perpendicular à reta l que passa pelo centro da hipérbole é denominada reta não focal. Tem-se que a hipérbole H não intersecta a reta l', pois l' é mediatriz de $\overline{F_1F_2}$, logo

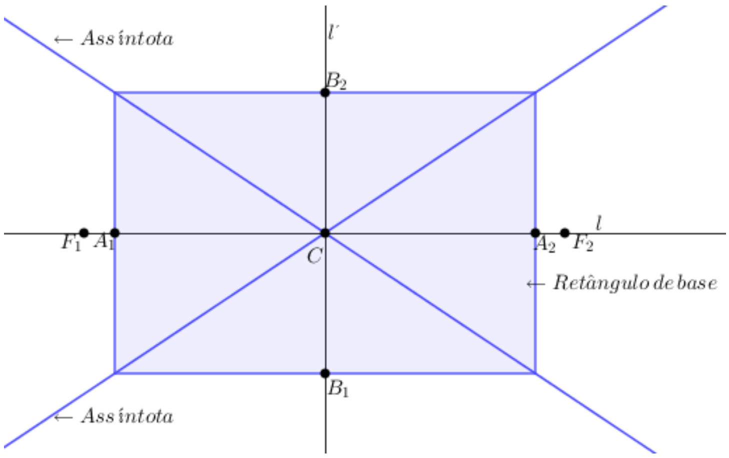
$$P \in l' \Rightarrow |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 0.$$

O segmento $\overline{B_1B_2}$ que passa pelo ponto C, perpendicular ao eixo focal cujo comprimento é $2b$ com $b^2 = c^2 - a^2$ é denominado eixo não focal.

A excentricidade da hipérbole é dada por $e = \frac{c}{a} > 1$.

As assíntotas da hipérbole são as retas que passam pelo centro e tem inclinação $\pm\frac{b}{a}$ sendo l e $l\,\acute{}$ as bissetrizes das assíntotas (ver Figura 22).

Figura 22 – Assíntotas da hipérbole.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

3.2.1 As propriedades de simetria da Hipérbole.

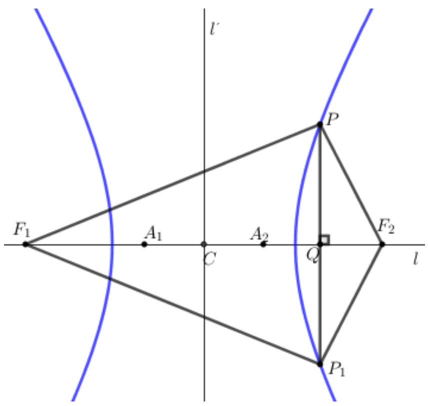
Proposição 3.3. *A hipérbole é simétrica em relação à reta focal.*

Demonstração. De fato, sejam $P \in H$ e P_1 o simétrico de P em relação à reta focal (ver Figura 23). Como $\overline{PQ} = \overline{P_1Q}$ por simetria, $\overline{F_1Q} = \overline{F_1Q}$ já que são segmentos comuns e $P\hat{Q}F_1 = P_1\hat{Q}F_1$, já que são retos, tem-se que os triângulos PQF_1 e P_1QF_1 são congruentes pelo caso LAL, o mesmo ocorrendo com os triângulos PQF_2 e P_1QF_2, pois $\overline{PQ} = \overline{P_1Q}$ por simetria, $\overline{F_2Q} = \overline{F_2Q}$ já que são segmentos comuns e $P_1\hat{Q}F_2 = P_1\hat{Q}F_2$, já que são retos. Em particular tem-se $\overline{F_1P} \cong \overline{F_1P_1}$ e $\overline{F_2P} \cong \overline{F_2P_1}$ e portanto

$$|d(F_1,P_1) - d(F_2,P_1)| = |d(F_1,P) - d(F_2,P)| = 2a \Rightarrow P_1 \in H.$$

□

Figura 23 – Simetria da hipérbole com relação à reta focal.

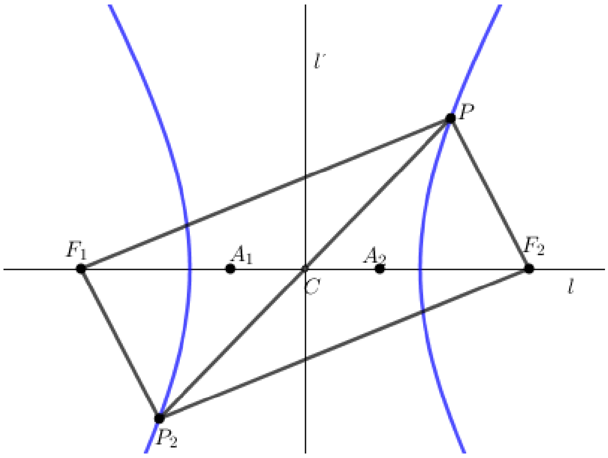


Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Analogamente obtem-se a simetria com relação à reta não focal.

Proposição 3.4. *A hipérbole é simétrica em relação ao centro.*

Figura 24 – Simetria da hipérbole com relação ao centro.



Fonte:Desenvolvido pelo autor.

Demonstração. De fato, seja $P \in H$ e P_2 o simétrico de P em relação ao centro (ver Figura 24). Como $\overline{PC} = \overline{P_2C}$ por simetria, $\overline{F_1C} = \overline{F_2C}$ pois C é ponto médio de $\overline{F_1F_2}$ e $P\hat{C}F_2 = P_2\hat{C}F_1$, já que são opostos pelo vértice, tem-se que os triângulos PCF_2 e P_2CF_1 são congruentes pelo caso LAL. O mesmo acontece com os triângulos F_1CP e F_2CP_2, pois $\overline{PC} = \overline{P_2C}$ por simetria, $\overline{F_1C} = \overline{F_2C}$ pois C é ponto médio de $\overline{F_1F_2}$ e $F_1\hat{C}P = P_2\hat{C}F_2$, já que são opostos pelo vértice. Segue que $\overline{F_1P} \cong \overline{F_2P_2}$ e $\overline{F_2P} \cong \overline{F_1P_2}$ e consequentemente

$$|d(F_2,P_2) - d(F_1,P_2)| = |d(F_1,P) - d(F_2,P) = 2a \Rightarrow P_2 \in H.$$

□

3.2.2 A propriedade refletora da Hipérbole

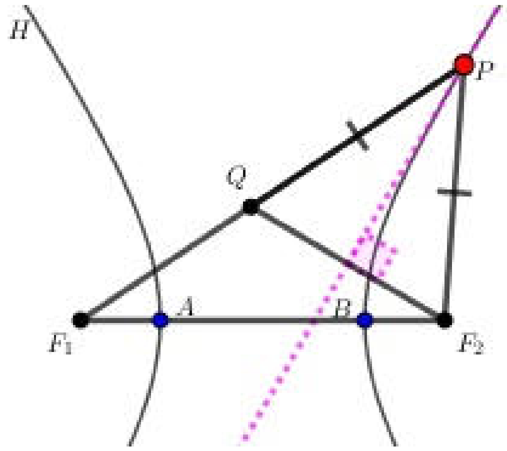
A hipérbole possui uma propriedade interessante, conhecida como Propriedade Refletora, a qual diz o seguinte:

Teorema 3.2. *Dado uma hipérbole H e um ponto $P \in H$, com F_1 e F_2, focos da hipérbole, tem-se que os ângulos formados entre a reta tangente à hipérbole no ponto P e os segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ são iguais.*

Antes de demonstrarmos a propriedade refletora da hipérbole, iremos conceituar alguns resultados que serão usados mais adiante.

Considere a hipérbole H, ver Figura 25, com eixo focal AB, de comprimento $2a$ e focos F_1 e F_2 e seja $P \in H$. Trace os segmentos de reta, $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$. Em $\overline{F_1P}$, marque o ponto Q tal que $\overline{QP} = \overline{F_2P}$. Trace mediatriz m do triângulo QPF_2.

Figura 25 – Mediatriz e tangente a uma hipérbole.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Então a reta m é tangente à hipérbole no ponto P.

Para provar isto basta ver que a reta m será tangente à hipérbole H no ponto P, se P for o único ponto de interseção entre m e H. Em primeiro lugar, como $d(Q,P) = d(F_2,P)$, note que $\overline{F_1Q} = 2a$, pois

$$\begin{aligned} |d(F_1,P) - d(F_2,P)| = 2a &\Leftrightarrow |d(F_1,Q) + d(Q,P) - d(F_2,P)| = 2a \\ &\Leftrightarrow |d(F_1,Q)| = 2a. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que exista um ponto P_1, (ver Figura 26), pertencente a m e a hipérbole H. Então

$$d(P_1,Q) = d(P_1,F_2) \text{ e } |d(F_1,P_1) - d(F_2,P_1)| = 2a.$$

Mas pela hipótese,

$$|d(F_1,P_1) - d(F_2,P_1)| = 2a \Rightarrow |d(F_1,P_1) - d(Q,P_1)| = 2a$$

o que é absurdo, pois pela desigualdade triangular,

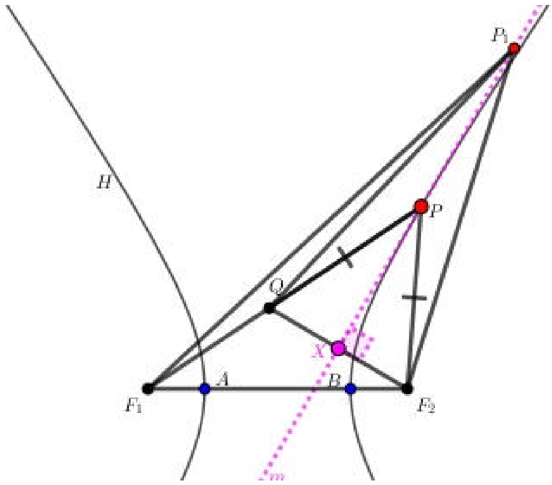
$$d(Q,P_1) + d(F_1,Q) > d(F_1,P_1)$$

e como $d(Q,F_1) = 2a$, tem-se

$$2a > d(F_1,P_1) - d(P_1,Q).$$

Logo, a reta m é tangente à hipérbole.

Figura 26 – Unicidade do ponto de intersecção entre a tangente e hipérbole.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Agora estamos aptos a provar a propriedade refletora da hipérbole.

Demonstração. (do Teorema 3.2) De fato, note, através da Figura 26, que o triângulo PQF_2 é isósceles, donde, $\overline{F_2X} = \overline{XQ}$ e assim os triângulos F_2PX e QPX são congruentes pelo caso LAL. Desta forma, $F_2\hat{P}X = Q\hat{P}X$, como queríamos demonstrar. □

3.2.3 Hipérbole e sua forma canônica

Uma hipérbole pode estar situada em diversas posições no plano. Podemos ter uma hipérbole:

- Com centro na origem e reta focal no eixo OX ou com centro na origem e reta focal no eixo OY.
- Hipérbole com centro sendo um ponto do plano com sistema de coordenadas paralelo aos eixos OX e OY.
- Hipérbole com centro sendo um ponto do plano com sistema de coordenadas não paralelo (inclinado) aos eixos OX e OY.

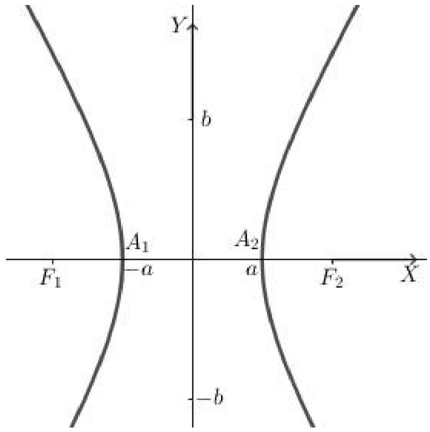
Nesta seção discorreremos apenas sobre o primeiro dos casos acima.

Hipérbole com centro na origem e reta focal no eixo OX.

Considere um sistema de eixos ortogonais OXY (Figura 27) com

- $F_1 = (-c, 0), F_2 = (c, 0),\ \ A_1 = (-a, 0), A_2 = (a, 0)$.
- $B_1 = (0, -b), B_2 = (0, b),\ \ 0 \leq a < c$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Figura 27 – Hipérbole sobre eixo OX.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Por definição,

$$P = (x,y) \in H \Leftrightarrow |d(F_1,P) - d(F_2,P)| = 2a$$

e portanto

$$d(F_1,P) - d(F_2,P) = 2a \,\text{ou}\, d(F_1,P) - d(F_2,P) = -2a.$$

Assim, para o primeiro caso (o outro é análogo), temos que

$$\begin{aligned} d(F_1,P) - d(F_2,P) = 2a &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\ &\Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow 4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\ &\Leftrightarrow (xc-a^2)^2 = a^2((x-c)^2+y^2) \\ &\Leftrightarrow x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 = a^2(c^2-a^2) \\ &\Leftrightarrow x^2(c^2-a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2) \\ &\Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \end{aligned}$$

o que equivale a

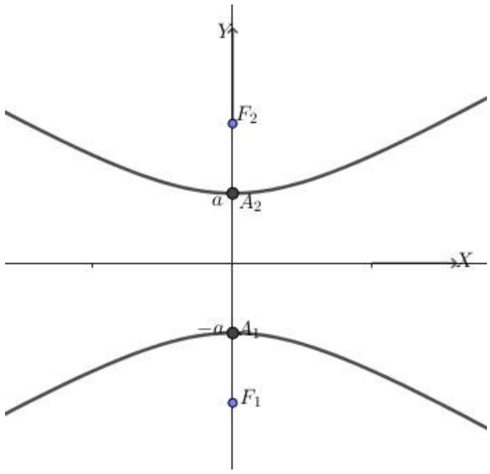
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.5}$$

Hipérbole com centro na origem e reta focal no eixo OY.

Neste caso, temos

- $F_1 = (0,-c) \qquad F_2 = (0,c)$
- $A_1 = (0,-a) \qquad A_2 = (0,a)$
- $B_1 = (-b,0) \qquad B_2 = (b,0)$

Figura 28 – Hipérbole centro na origem e reta focal no eixo OY.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Analogamente à dedução da Equação (3.5), chegamos à equação da hipérbole centrada no eixo OY:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \tag{3.6}$$

3.2.4 Esboço da Hipérbole centrada na origem e com focos no eixo OX

Vimos na Seção 3.2.1 que a hipérbole é simétrica em relação aos eixos OX e OY, e ao centro dos eixos coordenados. Seja $P = (x, y)$ pertence a hipérbole. Da Equação (3.5) temos que

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow |x| \geq a.$$

Isso significa que a hipérbole não está contida na faixa a direta da reta $x = -1$ e a esquerda da reta $x = 1$, não interceptando o eixo OY e interceptando o eixo OX nos ponto $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$ (ver Figura 29). Da equação (3.5) ainda temos

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geq a.$$

Assim, devido a simetria é suficiente analisar o primeiro quadrante, ou seja,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geq a.$$

Considere $f : [a, +\infty] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Então, como

$$f'(x) = -\frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} < 0 \quad \forall x \in (a, +\infty)$$

segue que f é crescente em $[a, +\infty]$. Além disso, observando que

$$f''(x) = -\frac{ba}{(x^2 - a^2)^{3/2}} < 0 \quad \forall x \in (a, +\infty)$$

concluímos que f é uma função côncava em $[a,+\infty]$.

As retas $y=\frac{b}{a}x$ $(r^{+}: bx-ay=0)$ e $y=-\frac{b}{a}x$ $(r^{-}: bx+ay=0)$ são chamadas de assíntotas. A explicação a seguir justifica o nome. Seja $P=(x,y)\in H$. Vimos que

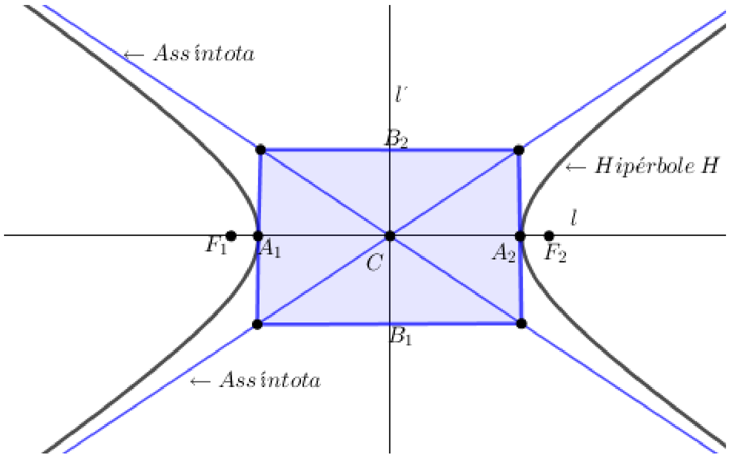
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$$

Então

$$d(P,r^{+})=\frac{|bx-ay|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{|bx-ay|}{\sqrt{b^2+a^2}}\frac{|bx+ay|}{|bx+ay|}=\frac{|b^2x^2-a^2y^2|}{\sqrt{b^2+a^2}}\frac{1}{|bx+ay|}=\frac{a^2b^2}{\sqrt{b^2+a^2}}\frac{1}{|bx+ay|}.$$

Diante disso, vê-se que a $d(P,r^{+})\longrightarrow 0$, quando $x\longrightarrow\pm\infty$ e $y\longrightarrow\pm\infty$. De modo análogo, conclui-se que $d(P,r^{-})\longrightarrow 0$, quando $x\longrightarrow\pm\infty$ e $y\longrightarrow\pm\infty$. Isto mostra que a hipérbole se aproxima tanto quanto se queira mais não intersecta a assíntota.

Figura 29 – Esboço da hipérbole sobre o eixo OX.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Esboço do gráfico da hipérbole centrada na origem e reta focal sobre o eixo OY.

Nesse caso, temos,

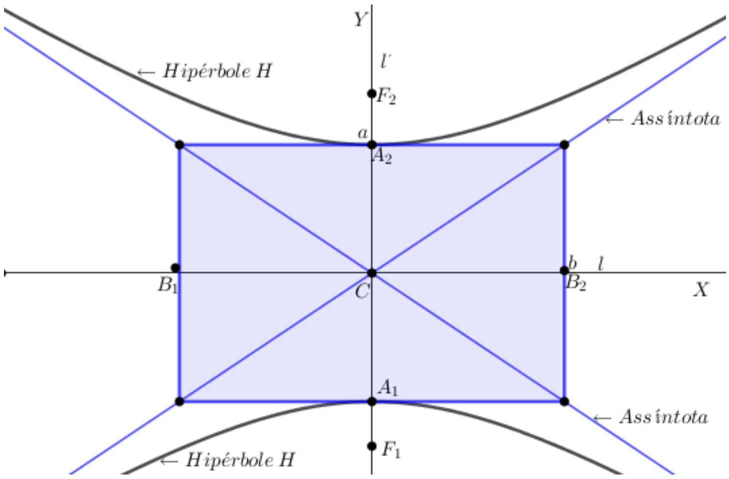
- $F_1=(0,-c)$ $\quad F_2=(0,c)$.
- $A_1=(0,-a)$ $\quad A_2=(0,a)$.
- $B_1=(-b,0)$ $\quad B_2=(b,0)$.
- $b^2=c^2-a^2$.

Da Seção 3.2.3 temos

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

e as assíntotas serão $x=\pm\frac{b}{a}y$. Procedendo como no caso anterior, obtemos o gráfico da hipérbole.

Figura 30 – Esboço da hipérbole sobre o eixo OY.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

3.3 A PARÁBOLA

Definição 4. *Sejam r uma reta contida no plano π e F um ponto não pertencente a r. Chamamos de parábola $\mathscr{P}$ com foco F, o conjunto dos pontos do plano π equidistantes de F e r, isto é;*

$$\mathscr{P} = \{P \,|\, d(P,F) = d(P,r)\} \tag{3.7}$$

- A reta r será chamada de diretriz.
- A reta focal l da parábola $\mathscr{P}$ é a reta que contém o foco F e é perpendicular à diretriz r.
- Denotando por A, a interseção da diretriz r com a reta focal l, chamaremos de vértice da parábola $\mathscr{P}$ o ponto médio de $\overline{AF}$, e o denotaremos por V.
- Sendo $d(V,r) = d(V,F) = p$, denominaremos $2p = d(F,r)$ o parâmetro da parábola.
- A distância d, de uma reta r a um ponto P é dado por $d = \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, onde (x_1,y_1) são as coordenadas do ponto P e $ax+by+c=0$ é a equação da reta r.

3.3.1 A propriedade da simetria da Parábola

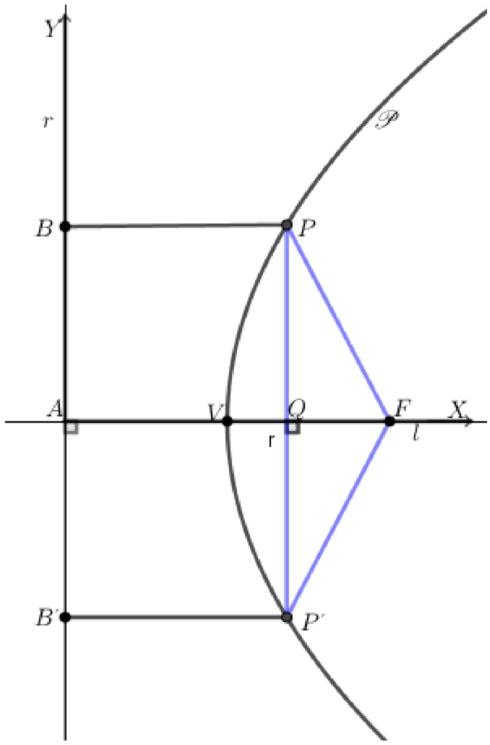
Proposição 3.5. *A parábola é simétrica em relação à sua reta focal.*

Demonstração. De fato, seja P um ponto da parábola $\mathscr{P}$, e P' seu simétrico em relação à reta focal l (Ver Figura 31). Então $\overline{PP'}$ é perpendicular à reta l e intersecta l no ponto Q, ponto médio de $\overline{PP'}$. Como $\overline{PQ} = \overline{P'Q}$, já que são simétricos, $\overline{QF} = \overline{QF}$, já que são segmentos em comum e $P\hat{Q}F = P'\hat{Q}F$, pois são ângulos retos, tem-se que os triângulos PQF e $P'QF$ são congruentes pelo caso LAL, e assim, $d(P,F) = d(P',F)$. Além disso, como $AB'P'Q$ e $ABPQ$ são retângulos, e assim $d(P',r) = d(Q,r) = d(P,r)$ e portanto

$$d(P',r) = d(P,r) \text{ e } d(P',F) = d(P,F)$$

ou seja, $P' \in \mathscr{P}$. $\square$

Figura 31 – Simetria da parábola.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

3.3.2 A propriedade refletora da Parábola

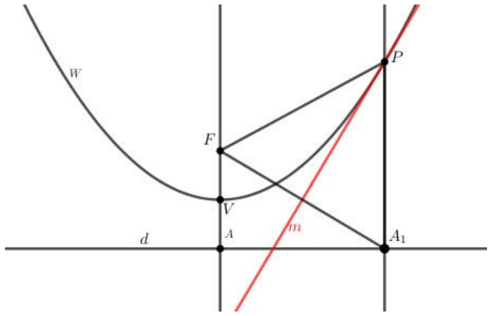
A parábola possui uma propriedade interessante, conhecida como Propriedade Refletora, a qual diz o seguinte:

Teorema 3.3. *Dada uma parábola W, com foco F e um ponto $P \in W$ (Figura 33), tem-se que o ângulo entre a reta tangente no ponto P e o segmento $\overline{PF}$ é igual ao ângulo entre a reta tangente no ponto P e a reta (d_1) paralela à reta focal que passa por P.*

Antes de demonstrarmos a propriedade refletora da parábola, iremos conceituar alguns resultados que serão usados mais adiante.

Considere uma parábola W com foco F, diretriz d e vértice V, conforme Figura 32. Agora tome o ponto A, pé da perpendicular baixada de F à diretriz d e $A_1 \neq A$ de tal forma que a perpendicular a d que passe por A_1 intersecte W em P. Em seguida trace os segmentos $\overline{FP}$,$\overline{A_1P}$ e $\overline{A_1F}$, trace a mediatriz m do triângulo FPA_1 e tome M o ponto médio de $\overline{FA_1}$.

Figura 32 – Reta tangente à uma parábola.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Afirmamos que m é tangente à parábola no ponto P. Para ver isto suponha que exista $P_1 \in W \cap m$.

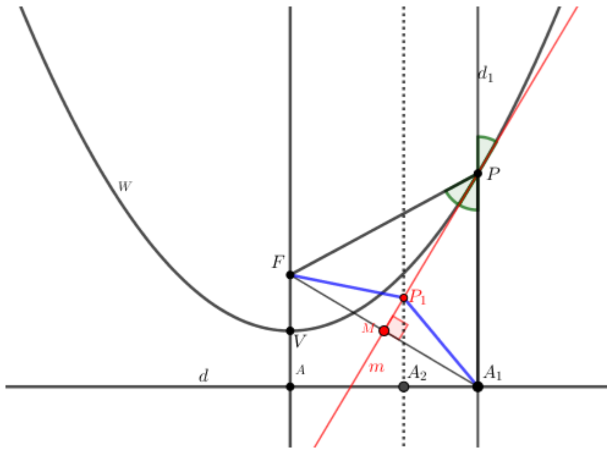
Se $P_1 \in W \cap m$, então

(*) $\overline{P_1F} = \overline{P_1A_2}$.

(**) Sendo A_2 o pé da perpendicular baixada de P_1 à reta d, tem-se que o triângulo $P_1A_1A_2$ é retângulo de hipotenusa $\overline{P_1A_1}$, e assim $\overline{P_1F} = \overline{P_1A_1} > \overline{P_1A_2}$.

De (*) e (**) tem-se uma contradição. Portanto, a mediatriz m é tangente à parábola no ponto P.

Figura 33 – Unicidade do ponto tangente à parábola.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Agora estamos aptos a provar a propriedade refletora da parábola.

Demonstração. (do Teorema 3.3).

De fato, como m é mediatriz, tem-se, pelo caso LAL, que os triângulos FPM e A_1PM são congruentes, e assim $A_1\hat{P}M = F\hat{P}M$. Como o ângulo entre a reta tangente no ponto P e a reta (d_1) paralela à reta focal que passa por P é igual ao $A_1\hat{P}M$, já que são opostos pelo vértice, segue que o ângulo entre a reta tangente no ponto P e o segmento $\overline{PF}$ é igual ao ângulo entre a reta tangente no ponto P e a reta (d_1) paralela à reta focal que passa por P, como queríamos demonstrar.

$\square$

3.3.3 Parábola e sua forma canônica

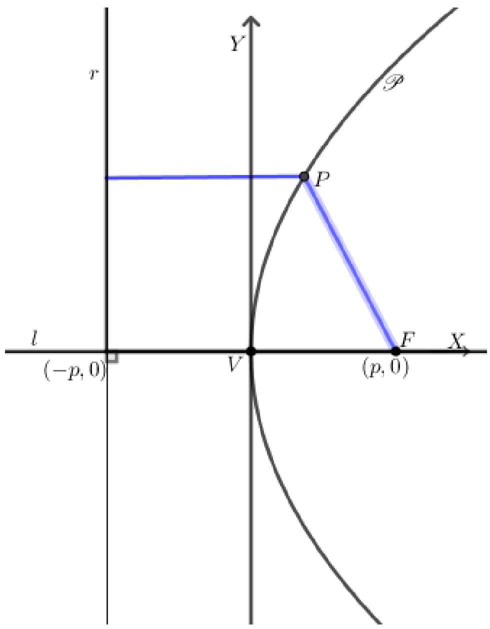
Nesta seção deduziremos a forma da canônica de uma parábola.

Parábola com vértice na origem e reta focal no eixo OX.

Seja $V = (0,0)$, o vértice, $F = (p,0)$, o foco e $r : x = -p$, a reta diretriz com $d(F,r) = 2p$, conforme Figura 34. Então

$$\begin{aligned}
P = (x,y) \in \mathscr{P} &\Leftrightarrow d(P,F) = d(P,r) \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p| \\
&\Leftrightarrow (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 \\
&\Leftrightarrow -2px + y^2 = 2px \\
&\Leftrightarrow y^2 = 4px
\end{aligned}$$

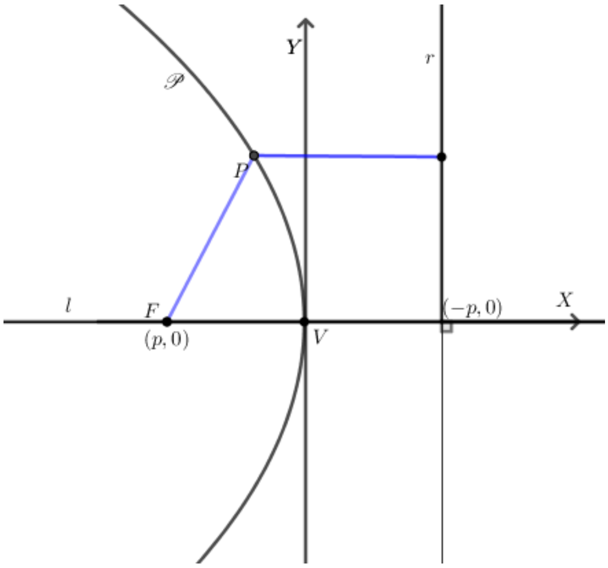
Figura 34 – Foco à direita da diretriz r.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Analogamente, se $V = (0,0)$, $F = (-p,0)$ e $r : x = p$, com $d = (F,r) = 2p$, obtemos a forma canônica, $y^2 = -4px$, para uma parábola voltada para a esquerda. A Figura 35 ilustra tal situação.

Figura 35 – Foco à esquerda da diretriz r .



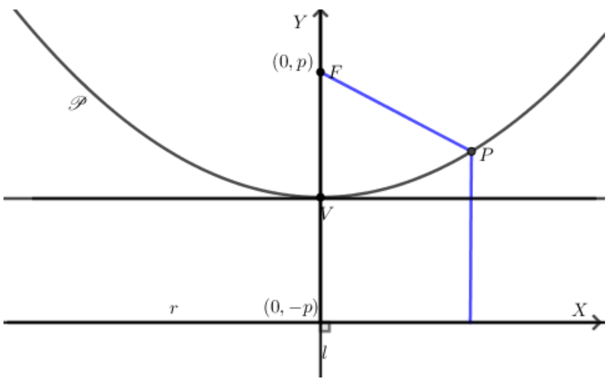
Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Parábola com vértice na origem e reta focal no eixo OY.

Seja $V = (0,0)$, o vértice, $F = (0, p)$, o foco e $r : y = -p$, a reta diretriz com $d(F,r) = 2p$, conforme Figura 36. Então

$$\begin{aligned} P = (x,y) \in \mathscr{P} &\Leftrightarrow d(P,F) = d(P,r) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p| \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2py = 2py \\ &\Leftrightarrow x^2 = 4py. \end{aligned}$$

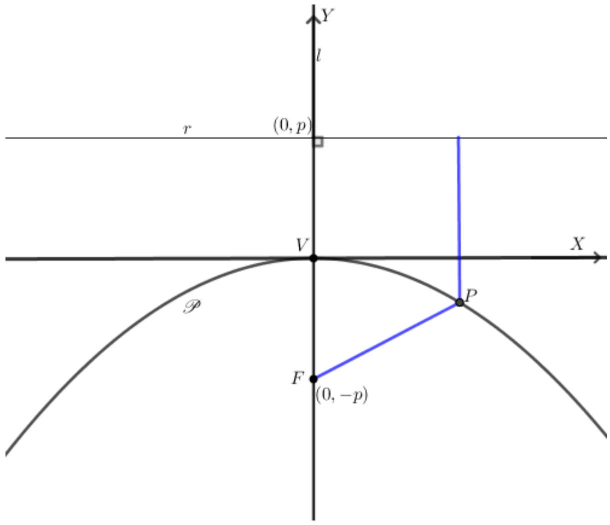
Figura 36 – Foco sobre a diretriz r.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Analogamente, se $V = (0,0)$, $F = (0,-p)$ e $r : y = p$, com $d = (F,r) = 2p$, obtemos a forma canônica, $x^2 = 4py$, de uma parábola cuja concavidade é voltada para baixo, Figura 37.

Figura 37 – Foco sob a diretriz r.

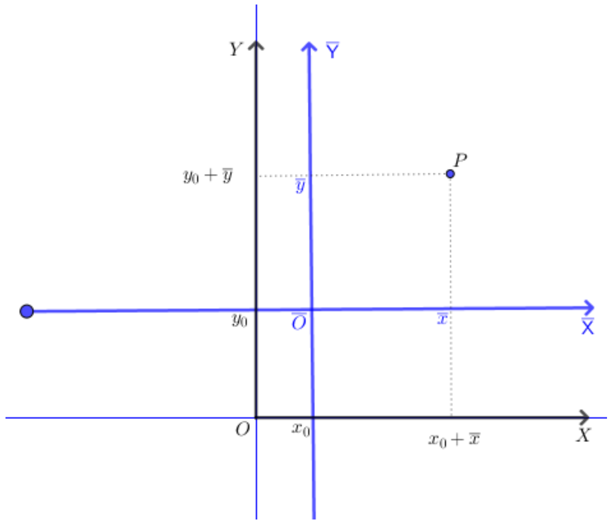


Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Na próxima seção abordaremos as cônicas transladadas. O tratamento das cônicas em eixos paralelos aos eixos OX eOY (translação dos eixos) representa uma extensão natural das investigações conduzidas ao estudo das cônicas com reta focal nos eixos OX ou OY.

3.4 TRANSLAÇÃO

Figura 38 – Translação de eixos cartesianos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Considere OXY um sistema de eixos ortogonais cuja origem é $O = (0,0)$ e $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ um sistema de eixos tal que $\overline{OX}$ e $\overline{OY}$ são paralelos, respectivamente aos eixos OX e OY.

Seja $\overline{O} = (x_0, y_0)$ um ponto do plano e P com coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ e (x, y), relativas, respectivamente, aos eixos $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ e OXY. (ver Figura 38). Assim, a partir da Figura 38, podemos concluir que o "novo sistema" $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ é obtido a partir de uma translação do "sistema antigo"OXY. Sendo (x_0, y_0) as coordenadas da origem no sistema de eixos $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$, relacionaremos este novo sistema ao sistema de eixos OXY da seguinte forma

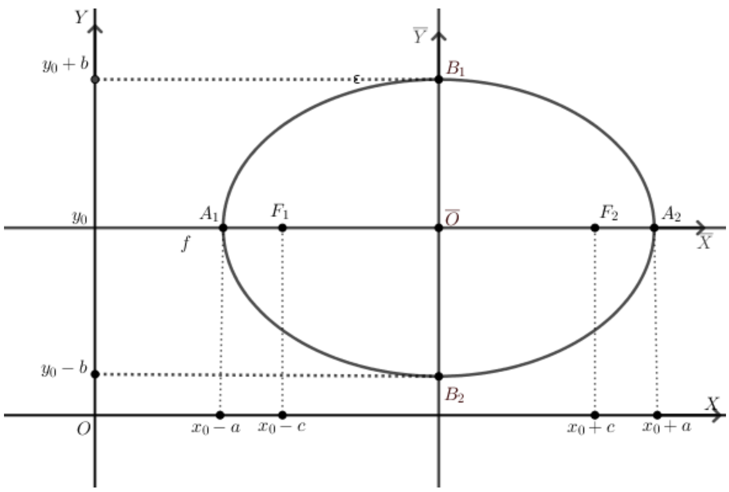
$$\begin{cases} x = \overline{x} + x_0. \\ y = \overline{y} + y_0. \end{cases} \tag{3.8}$$

3.4.1 Forma canônica da Elipse com reta focal paralela ao eixo OX.

Seja $\overline{O} = (x_0, y_0)$ a origem do sistema $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ obtido a partir da translação do sistema de eixos OXY. Conforme Figura 39, os elementos da elipse transladada são

- Reta focal: $l : y = y_0$.
- Reta não focal: l': $x = x_0$.
- Focos $F_1 = (x_0 - c, y_0)$; $F_2 = (x_0 + c, x_0)$.
- Vértices sobre o eixo focal $A_1 = (x_0 - a, y_0)$; $A_2 = (x_0 + a, y_0)$.
- Vértices sobre o eixo não focal $B_1 = (x_0, y_0 - b)$; $_{B}2 = (x_0, y_0 + b)$.

Figura 39 – Elipse transladada paralelamente ao eixo OX.



Fonte: Desenvolvido pelo autor

Conforme o sistema (3.8), $P = (x,y) = (\overline{x}+x_0, \overline{y}+y_0)$ pertencerá à elipse se, e somente se,

$$\begin{aligned} d(P,F_1)+d(P,F_2) = 2a &\Leftrightarrow d((\overline{x}+x_0,\overline{y}+y_0),(x_0-c,y_0))+d((\overline{x}+x_0,\overline{y}+y_0),(x_0+c,y_0)) = 2a \\ &\Leftrightarrow d((\overline{x},\overline{y}),(-c,0))+d((\overline{x},\overline{y}),(c,0)) = 2a \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{x}^2}{a^2}+\frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1 \end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{3.9}$$

com $b^2 = a^2 - c^2$.

(a) Considere, no sistema OXY, os pontos $A = (x_1,y_1)$ e $B = (x_2,y_2)$. Tem-se que a distância $\overline{AB}$ é $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

(b) Ao transladarmos o sistema de coordenadas OXY para um novo sistema $\overline{OXY}$ com um deslocamento (x_0,y_0), temos que as coordenadas dos pontos A e B nesse novo sistema será $A_1 = (x_1+x_0, y_1+y_0)$ e $B_1 = (x_2+x_0, y_2+y_0)$, respectivamente. Assim, nesse novo sistema, a distância $\overline{A_1B_1}$ é $d_1 = \sqrt{((x_2+x_0)-(x_1+x_0))^2+((y_2+y_0)-(y_1+y_0))^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

De (a) e (b), tem-se que $d = d_1$, ou seja, a distância euclidiana é invariante por translação de sistemas coordenados.

3.4.2 Forma canônica da Elipse com reta focal paralela ao eixo OY.

Seja $\overline{O} = (x_0,y_0)$ a origem do sistema $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ obtido a partir da translação do sistema de eixos OXY. Conforme Figura 40, os elementos da elipse transladada são

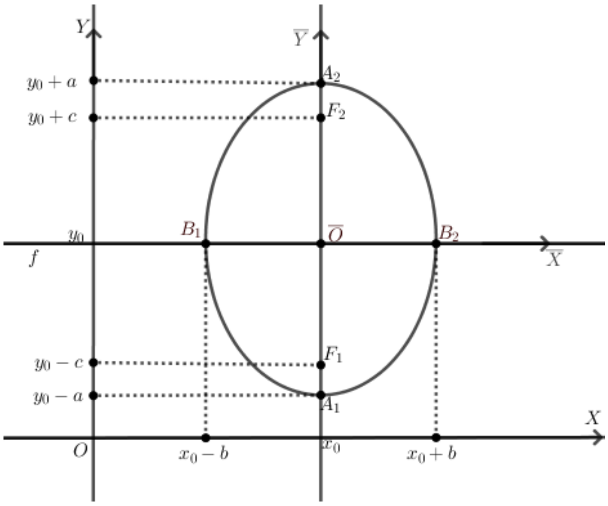
- Reta focal: $l : x = x_0$.
- Reta não focal:l': $y = y_0$.
- Focos $F_1 = (x_0, y_0-c)$; $F_2 = (x_0, y_0+c)$.
- Vértices sobre a reta focal $A_1 = (x_0, y_0-a)$; $A_2 = (x_0, y_0+a)$.
- Vértices sobre a reta não focal $B_1 = (x_0-b, y_0)$; $A_2 = (x_0+b, y_0)$.

Conforme o sistema (3.8), $P = (x,y) = (\overline{x}+x_0, \overline{y}+y_0)$, de modo análogo à elipse transladada com reta focal paralela ao eixo OX, conclui-se que a equação da elipse transladada com reta focal paralela ao eixo OY, é dada por

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1 \tag{3.10}$$

com $b^2 = a^2 - c^2$.

Figura 40 – Elipse transladada com reta focal sobre o eixo OY.

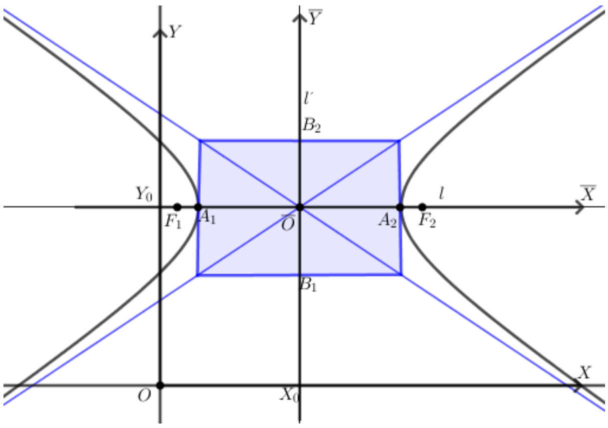


Fonte: Desenvolvido pelo autor.

3.4.3 Translação da Hipérbole com reta focal paralela ao eixo OX.

Nesta seção, consideraremos o mesmo procedimento utilizado para as mudanças de coordenadas do sistema OXY para o sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ (ver Figura 38). Conforme descrito em (3.8), temos $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$.

Figura 41 – Hipérbole transladada com reta focal paralela ao eixo OX.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

No novo sistema de coordenadas, observe a Figura 41 e considere:

- A origem $\overline{O} = (x_0, y_0)$.
- Reta focal: $l : y = y_0$.
- Reta não focal: $l' : x = x_0$.

- Focos $F_1 = (x_0 - c, y_0)$; $F_2 = (x_0 + c, x_0)$.
- Vértices sobre a reta focal $A_1 = (x_0 - a, y_0)$; $A_2 = (x_0 + a, y_0)$.
- Vértices imaginários $B_1 = (x_0, y_0 - b)$; $A_2 = (x_0, y_0 + b)$.
- Assíntotas $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0) \Leftrightarrow b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$ e $b(x - x_0) + a(y - y_0) = 0$.

Conforme o sistema (3.8), $P = (x,y) = (\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0)$ pertencerá à hipérbole se, e somente se,

$$\begin{aligned} |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a &\Leftrightarrow |d((\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0),(x_0 - c, y_0)) - d((\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0),(x_0 + c, y_0))| = 2a \\ &\Leftrightarrow |d((\overline{x},\overline{y}),(-c,0)) - d((\overline{x},\overline{y}),(c,0))| = 2a \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1, \end{aligned}$$

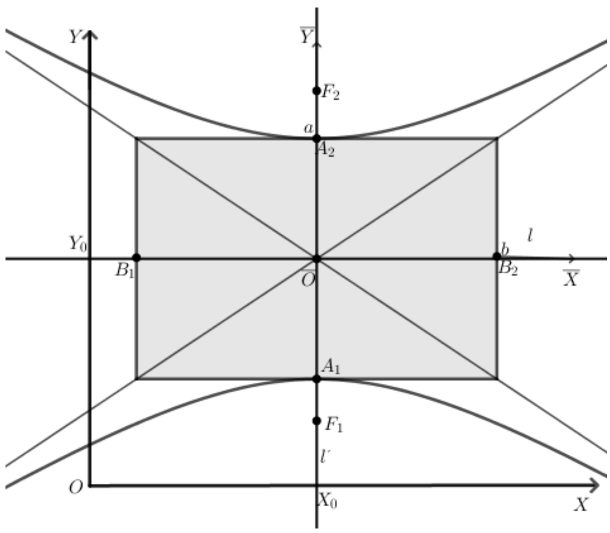
e portanto

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \tag{3.11}$$

com $b^2 = c^2 - a^2$.

3.4.4 Forma canônica da Hipérbole com reta focal paralela ao eixo OY.

Figura 42 – Hipérbole transladada com reta focal paralela eixo OY.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Seja $\overline{O} = (x_0, y_0)$ a origem do sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ obtido a partir da translação do sistema de eixos OXY.

Conforme Figura 42, os elementos da hipérbole transladada são

- Reta focal: $l : x = x_0$.

- Reta não focal:$l\,' y = y_0$.
- Focos $F_1 = (x_0, y_0 - c)$; $F_2 = (x_0, y_0 + c)$.
- Vértices sobre a reta focal $A_1 = (x_0, y_0 - a)$; $A_2 = (x_0, y_0 + a)$.
- Vértices sobre a reta não focal $B_1 = (x_0 - b, y_0)$; $A_2 = (x_0 + b, y_0)$.
- Assíntotas $x - x_0 = \pm\frac{b}{a}(y - y_0) \Leftrightarrow a(x - x_0) - b(y - y_0) = 0$ e $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

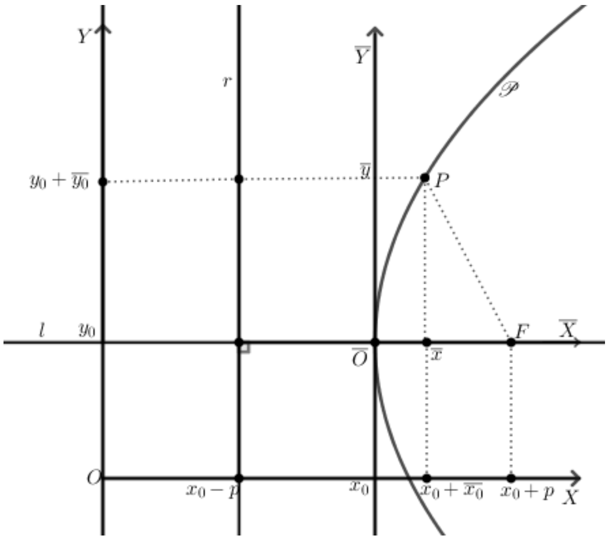
De maneira análoga ao caso da translação da hipérbole paralela ao eixo OX, conclui-se que a equação da hipérbole com centro $\overline{O} = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY é dada por

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1, \tag{3.12}$$

com $b^2 = c^2 - a^2$.

3.4.5 Translação da Parábola com reta focal paralela ao eixo *OX*.

Figura 43 – Parábola transladada com reta focal paralela eixo OX e foco à direita da diretriz.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Nesta subseção, consideraremos o mesmo procedimento utilizado para as mudanças de coordenadas do sistema OXY para o sistema $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ (ver Figura 38). Conforme descrito em (3.8), temos $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$. Considere ainda $V = (x_0, y_0)$ o vértice da parábola tal que a origem $\overline{O}$ do sistema cartesiano $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ coincida com V, isto é, $\overline{O} = V = (x_0, y_0)$.

Observe na Figura 43, que o foco está à direita da diretriz r. Assim, conforme subseção 3.3.3, podemos verificar que no sistema de coordenadas $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ teremos como equação da parábola transladada, $\overline{y}^2 = 4p\overline{x}$, com foco $\overline{F} = (p, 0)$, vértice $\overline{V} = (0, 0)$, diretriz $\overline{r} : \overline{x} = -p$ e reta focal $\overline{l} : \overline{y} = -p$.

E por fim, como $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$, teremos a equação da parábola transladada dada por

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0). \tag{3.13}$$

Assim, seus elementos serão

- Foco: $F = (x_0 + p, y_0)$.
- Vértice: $V = (x_0, y_0)$.
- Diretriz: $r : x - x_0 = -p \Leftrightarrow r : x = x_0 - p$.
- Reta focal: $l : y - y_0 = 0 \Leftrightarrow l : y = y_0$.

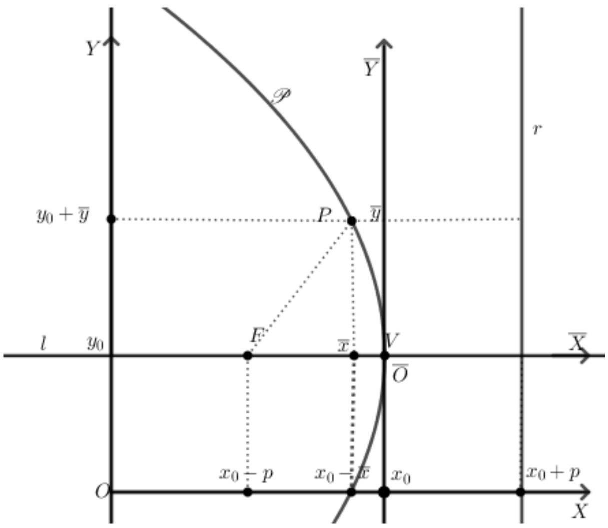
Observe na Figura 44 que o foco está à esquerda da diretriz r. Conforme Seção 3.3.3, podemos verificar que no sistema de coordenadas $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ teremos como equação da parábola transladada, $\overline{y}^2 = -4p\overline{x}$, com foco $\overline{F} = (-p, 0)$, vértice $\overline{V} = (0,0)$, diretriz $\overline{r} : \overline{x} = p$, reta focal $\overline{l} : \overline{y} = 0$. Então, como $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$, obteremos a equação da parábola transladada dada por

$$(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0). \tag{3.14}$$

Seus elementos neste caso serão

- Foco: $F = (x_0 - p, y_0)$.
- Vértice: $V = (x_0, y_0)$.
- Diretriz: $r : x - x_0 = p \Leftrightarrow r : x = x_0 + p$.
- Reta focal: $l : y - y_0 = 0 \Leftrightarrow l : y = y_0$.

Figura 44 – Parábola transladada com reta focal paralela eixo OX e foco à esquerda da diretriz.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

3.4.6 Translação da Parábola com reta focal paralela ao eixo OY.

Nesta seção, vamos aplicar o mesmo método utilizado para a mudança de coordenadas do sistema OXY para o sistema $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ (Ver Figura 38). Conforme explicado em (3.8), as equações de transformação são $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$. Considere ainda $V = (x_0, y_0)$ o vértice da parábola tal que a origem $\overline{O}$ do sistema cartesiano $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ coincida com V, isto é, $\overline{O} = V = (x_0, y_0)$

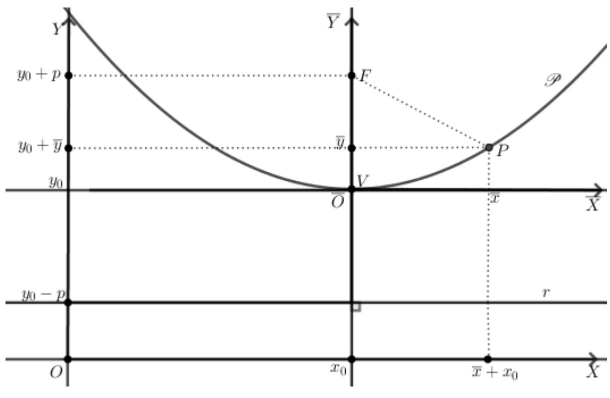
Observe na Figura 45 que o foco está acima da diretriz r. Conforme Seção 3.3.3, podemos verificar que no sistema de coordenadas $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$ teremos como equação da parábola transladada, a equação $\overline{x}^2 = 4p\overline{x}$, com foco $\overline{F} = (0, p)$, vértice $\overline{V} = (0,0)$, diretriz $\overline{r} : \overline{y} = -p$, reta focal $\overline{l} : \overline{x} = 0$. E como $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$, obteremos a equação da parábola transladada dada por

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0). \tag{3.15}$$

E assim, seus elementos são

- Foco: $F = (x_0, y_0 + p)$.
- Vértice: $V = (x_0, y_0)$.
- Diretriz: $r : y - y_0 = -p \Leftrightarrow L : y = y_0 - p$.
- Reta focal: $l : x - x_0 = 0 \Leftrightarrow l : x = x_0$.

Figura 45 – Parábola transladada com reta focal paralela eixo OY sobre a diretriz.



Fonte: Deenvolvido pelo autor.

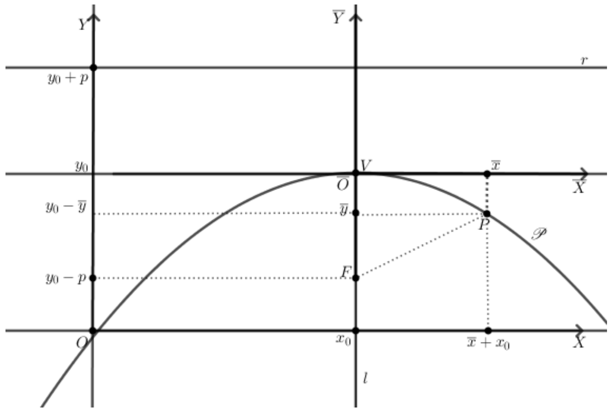
Na Figura 46, notamos que o foco encontra-se abaixo da diretriz r. De acordo com a subseção 3.3.3, podemos deduzir que no sistema de coordenadas $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$, a equação transladada da parábola será $\overline{x}^2 = -4p\overline{y}$. Neste caso teremos foco $\overline{F} = (-p, 0)$, vértice $\overline{V} = (0,0)$, diretriz $\overline{r} : \overline{x} = p$ e reta focal $\overline{l} : \overline{y} = 0$. E como $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$, obteremos a equação da parábola transladada dada por

$$(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0). \tag{3.16}$$

E assim seus elementos são

- Foco $F = (x_0, y_0 - p)$.
- Vértice $V = (x_0, y_0)$.
- Diretriz $r : y - y_0 = p \Leftrightarrow r : y = y_0 + p$.
- Reta focal $l : x - x_0 = 0 \Leftrightarrow l : x = x_0$.

Figura 46 – Parábola transladada com reta focal paralela eixo *OY* e foco sob a diretriz.



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Diante da exposição da revisão da literatura sobre as cônicas desde Apolônio até as demonstrações analíticas contemporâneas, se fará uma transposição para investigar se as sequências didáticas ancoradas sob pressupostos teóricos da metodologia da pedagogia histórico-crítica contribuem para uma aprendizagem significativa do estudo das cônicas.

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA À LUZ DA PROPOSTA DIDÁTICA DA PEDAGOGIA HISTÓRICO-CRÍTICA

A pedagogia histórico-crítica, cujo principal expoente é o filósofo e educador Dermeval Saviani, destaca-se por sustentar a construção e contextualização dos saberes, relacionando-os à realidade da prática social. Nos escritos de Saviani, é frequente o entrelaçamento de conceitos marxistas na construção do pensamento histórico-crítico. Isso inclui a concepção do trabalho como forma fundante do ser social e princípio educativo, onde o ser humano interage com a natureza, transformando-a conforme suas idealizações. Além disso, o materialismo histórico dialético oferece uma lógica de compreensão das contradições na realidade, enquanto o modo de produção capitalista, dividido em classes, exerce influência sobre o processo educacional.

Na prática educacional, especialmente na educação básica e nas escolas públicas não seletivas, é comum encontrar um mal-estar docente recorrente. Os professores frequentemente lamentam as condições insalubres das estruturas físicas e, com ainda mais preocupação, o comportamento inadequado de uma parte significativa dos alunos. A falta de interesse em assuntos relacionados à matemática, a dificuldade na compreensão de conceitos básicos e a ausência de assiduidade destacam a necessidade premente de implementar novas estratégias de ensino para fortalecer o processo de aprendizagem.

Essas estratégias devem estar alinhadas com tendências pedagógicas que valorizem a construção do conhecimento matemático, relacionando-o à prática social. Dessa forma, a aquisição de conhecimentos será favorecida, pois os alunos serão capazes de perceber a relevância e aplicabilidade da matemática em seu contexto cotidiano.

Com o objetivo de estabelecer diretrizes para viabilizar a implementação de sequências didático-pedagógicas no ensino das cônicas, visando à criação de conexões entre as relações sociais e os conteúdos matemáticos, este trabalho apresentará a metodologia da pedagogia histórico-crítica. Serão discutidas reflexões sobre sua aplicação e os impactos esperados na aprendizagem dos conteúdos abordados.

A teoria da pedagogia histórico-crítica fundamenta-se, conforme (SAVIANI, 2021), na contraposição às tendências pedagógicas tradicionais e busca estabelecer uma correlação entre a educação e a realidade social. Essa realidade é de importância fundamental, pois é a partir do cotidiano do aluno que os rumos da aprendizagem são delineados. Partindo do pressuposto de que o ser humano é essencialmente social, e que é por meio de suas interações com o trabalho, as artes, as ciências e o ambiente ao seu redor que o conhecimento é continuamente construído, desconstruído e reconstruído. Como observa Gasparin (2012), "é a existência social dos indivíduos, suas ações sobre o mundo e sobre si mesmos que geram o conhecimento".

Desta forma, baseado na teoria desta pedagogia, propõe-se uma metodologia para sua implementação. Para tanto, faz-se uso da metodologia dialética, já que

> essa metodologia dialética do conhecimento perpassa todo o trabalho docente-discente, estruturando e desenvolvendo o processo de construção do conhecimento escolar, tanto no que se refere à nova forma de o professor estudar e preparar os conteúdos e elaborar e executar seu projeto de ensino, como às respectivas ações dos alunos. A nova metodologia de ensino-aprendizagem expressa a totalidade do processo pedagógico, dando-lhe centro e direção na construção e reconstrução do conhecimento. Ela da unidade a todos os elementos que compõem o processo educativo escolar (GASPARIN, 2012, p. 276).

No desenvolvimento da metodologia, Gasparin (2012) explica os passos a serem implementados na didática da pedagogia histórico-crítica, destacando que o educador deve adotar uma abordagem renovada na transmissão do conhecimento. Nesse contexto, os conceitos devem ser explorados por meio da contextualização em diversas áreas, uma vez que o conhecimento é historicamente construído pelo ser humano a partir de suas relações sociais e da transformação da natureza por meio do trabalho, assim,

> essa nova forma pedagógica de agir exige que se privilegiem a contradição, a dúvida, o questionamento; que se valorizem a diversidade e a divergência; que se interroguem as certezas e as incertezas, despojado os conteúdos de sua forma naturalizada, pronta, imutável. (GASPARIN, 2012, p.3)

Tendo na dialética suporte para o aprimoramento da transmissão e aquisição de conhecimento, fica evidenciado por Gasparin (2012), que nem a escola nem a sala de aula funciona com ponto de partida, mas sim, a realidade social mais ampla, partindo desta realidade para as teorizações no ambiente escolar e, depois desse processo, um novo retorno à realidade social, fortalecendo o caráter dialético da pedagogia histórico-crítica.

Diante desta inicial caracterização, a metodologia da pedagogia proposta por Gasparim (2012), sistematiza sua conjectura através dos seguintes passos:

4.1 PRÁTICA SOCIAL INICIAL

A prática social inicial constitui-se como a primeira elucidação da prática pedagógica do método histórico-crítico e é elaborada sob coordenação do professor, que visa abordar as relações sociais dos alunos, o que pensam, o que sabem e o que compreendem sob o processo histórico no qual está inserido, possibilitando teorizações futuras. É nesse momento que ocorre uma sensibilização no aluno, para que este possa estar receptivo a construir o conhecimento e fazer aproximações com o tema a ser desenvolvido.

Nesta elucidação, tanto professor quanto aluno estão inseridos no processo, todavia, pelo fato da necessidade do planejamento do conteúdo a ser abordado, o professor tem dimensão da realidade social de forma mais sintética (densa) que o aluno, sendo que o discente tem uma visão sincrética (caótica), uma síntese que toma como referência o senso comum, onde

> a visão dos alunos é sincrética porque, apesar dos conhecimentos que possuem sobre o assunto, a partir do cotidiano, ainda não realizaram, no ponto de partida, a relação da experiência pedagógica com a prática social mais ampla de que participam. Este passo, para o educando, consiste no primeiro contato que mantém com o conteúdo sistematizado que será trabalhado posteriormente pelo professor. É manifestação das concepções que possui a respeito do tema em questão. Portanto, não é de esperar que ele explicite com clareza os conceitos científicos do conteúdo proposto nem sua importância social ponto esta é uma tarefa muito complexa que aos poucos vai sendo desvendada (GASPARIN, 2012, p.17).

Na prática social inicial, tanto o professor quanto o aluno, sob a orientação do docente, estão envolvidos em discussões, trocando experiências e dinamizando as relações sociais, preparando assim para o segundo passo da metodologia proposta, isto é, a problematização.

4.2 PROBLEMATIZAÇÃO

Com base nos conceitos e experiências adquiridos na prática social inicial, uma nova abordagem diante dos ainda complexos conteúdos é delineada. Os questionamentos e indagações que emergem da prática social entram em cena, permitindo uma análise mais profunda. A realidade social começa a ser examinada sob uma ótica teórica, em que as vivências são correlacionadas com a teoria, como ressaltado por Gasparin,

> a problematização representa o momento do processo em que essa prática social é posta em questão, analisada, interrogada, levando em consideração o conteúdo a ser trabalhado e as exigências sociais de aplicação desse conhecimento (GASPARIN, 2012, p.34).

Durante o processo de problematização, cabe ao professor liderar as discussões, questionamentos e esclarecimentos dos conceitos e conteúdos abordados. É essencial que o aluno seja guiado em direção a desafios, à formulação de hipóteses e ao próprio processo de ensino-aprendizagem, permitindo assim uma ressignificação dos conceitos adquiridos e discutidos na prática social. Conforme observado por Gasparin (2012), esse momento se aprofunda e se sistematiza em relação ao conteúdo curricular.

4.3 INSTRUMENTALIZAÇÃO

Diante das questões debatidas na prática social e durante o processo de problematização, surge uma direção para que tanto o aluno quanto o conteúdo em discussão sejam confrontados, com o docente e o discente desempenhando papéis centrais na construção do conhecimento científico. É nesse momento de confronto e diálogo que novas perspectivas são exploradas e entendimentos são aprofundados, contribuindo para um aprendizado mais significativo e uma compreensão mais ampla dos temas abordados. Desta forma

> a instrumentalização realiza-se nos atos docentes e discentes necessários para a construção do conhecimento científico. Os educandos e o educador agem no sentido da efetiva elaboração interpessoal de aprendizagem, através da apresentação sistemática do conteúdo por parte do professor e por meio da ação intencional dos alunos de se apropriarem desse conhecimento (GASPARIN, 2012, p.49).

A prática social, a problematização e a instrumentalização formam os pilares de um processo pedagógico holístico, no qual diversas variáveis subjetivas e objetivas, como os aspectos sociais, políticos, culturais e econômicos, se entrelaçam e dinamizam o processo de aquisição de conhecimento. Esses elementos não apenas influenciam, mas também moldam o entendimento e a apreensão dos conteúdos científicos, oferecendo uma perspectiva multifacetada que enriquece a compreensão dos alunos. Ao reconhecer e integrar essas múltiplas facetas do conhecimento, promove-se uma verdadeira reconstrução dos conteúdos científicos, enriquecendo não apenas a compreensão dos alunos, mas também sua capacidade de análise crítica e reflexão sobre o mundo ao seu redor.

Dessa forma fica evidente que,

> neste processo, parte-se do conhecimento que se tem (sincrético) e aos poucos (pela mediação da análise) esse conhecimento anterior vai se ampliando, negando, superando, chegando a um conhecimento mais complexo e abrangente (parênteses sintético="concreto") (VASCONCELOS, 1993, p. 64 Apud GASPARIN ,2012, p. 50).

O professor, como tutor da turma, objetivando dinamizar o processo de ensino, deverá utilizar diversos recursos para fortalecer a aquisição de conhecimento. Conforme a Base Nacional Comum Curricular-BNCC (2018), ao adotar abordagens pedagógicas diversificadas, como o uso de tecnologias educacionais, atividades práticas, jogos didáticos e debates em grupo, o educador promove uma aprendizagem mais engajadora e significativa para os alunos. Além disso, a incorporação de recursos visuais, como vídeos, imagens e gráficos, auxilia na compreensão de conceitos complexos e estimula a participação ativa dos estudantes na construção do conhecimento. Com uma variedade de ferramentas e estratégias à disposição, o professor cria um ambiente de aprendizagem estimulante e colaborativo, capacitando os alunos a explorarem o conteúdo de maneiras diversas e aprofundadas.

4.4 CATARSE

E então, como concatenar os processos desenvolvidos e adquiridos através da sistematização da prática social, problematização e instrumentalização? Como manifestar essa aquisição de conhecimento? Como expressar a reconstrução dos conceitos presentes nos mais diversos conteúdos? Como traduzir o conhecimento adquirido? A estas perguntas, o conceito de catarse se estabelece como um elo crucial. A catarse, neste contexto, representa o momento liberação intelectual, onde os alunos são capazes de refletir sobre suas experiências e aprendizados, internalizando e consolidando o conhecimento adquirido. É através desse processo de catarse que os alunos conseguem transformar suas percepções e compreensões prévias, reconstruindo os conceitos de forma sólida e abrangente. Assim, a catarse configura-se como um mecanismo essencial para dar sentido e significado ao processo de aprendizagem, permitindo que os alunos transcendam a mera aquisição de informações para alcançar uma melhor compreensão dos conteúdos estudados. Gasparin menciona

> a catarse é a síntese do cotidiano e do científico, do teórico e do prático a que o educando chegou, marcando sua nova posição em relação ao conteúdo e a forma de sua construção social e sua reconstrução na escola. É a expressão teórica dessa postura mental do aluno que evidencia a elaboração da totalidade concreta em grau intelectual mais elevado de compreensão. Significa, outrossim, a conclusão, o resumo que ele faz do conteúdo aprendido recentemente. É o novo ponto teórico de chegada; a manifestação do novo conceito adquirido (GASPARIN, 2012, p.124).

Na catarse, o aluno já tem condições de compreender o propósito das questões lançadas nas etapas anteriores, pois desenvolveu uma percepção significativa dos conceitos abordados. Com uma compreensão no caminho da consolidação, ele se sente capacitado a avançar para a prática social final. Nesse estágio, o aluno está apto não apenas a aplicar os conhecimentos adquiridos, mas também a refletir sobre sua relevância e impacto no contexto social e prático. Ele é capaz de conectar teoria e prática de maneira mais eficaz, identificando como os conceitos estudados se relacionam com os desafios e as possíveis demandas da realidade a qual está inserido. A catarse como revela Gasparin (2012) é um ponto importante no processo de aprendizagem já que prepara o aluno para aplicar seu conhecimento de forma transformadora.

4.5 PRÁTICA SOCIAL FINAL

Nesta fase, tanto o aluno quanto o professor, por meio das etapas desenvolvidas anteriormente, passaram por transformações em suas visões sobre os conceitos relacionados aos conteúdos estudados. Ao vivenciarem os conhecimentos de forma contextualizada, valorizando os aspectos do cotidiano, deve-se perceber a capacidade de analisar as nuances e complexidades dos temas abordados. A experiência deve proporcionar uma compreensão realista dos conceitos, permitindo que tanto o aluno quanto o professor ampliem sua perspectiva e habilidades de análise e interpretação. Assim, a prática social final não apenas consolida o aprendizado, mas também promove uma reflexão crítica e uma visão densa dos conteúdos estudados.

> professor e alunos modificaram-se intelectual e qualitativamente em relação às suas concepções sobre o conteúdo que reconstruíram, passando de um estágio de menor compreensão científica a uma fase de maior clareza e compreensão dessa mesma concepção dentro da totalidade. Há, portanto, um novo posicionamento perante a prática social do conteúdo que foi adquirido (GASPARIN, 2012, p.139-140).

Entretanto, a prática social inicial e final se entrelaçam em suas próprias definições. O cumprimento das etapas anteriores da metodologia da pedagogia histórico-crítica e a dinâmica das relações sociais nos colocam, mesmo após a alteração qualitativa adquirida durante as etapas, sempre em condições de ressignificar os conteúdos ora estudados. Saviani (2021) indica que o processo pedagógico deve realizar, no ponto de chegada, o que no ponto de partida não está dado. Essa ideia destaca a importância da contínua reflexão e adaptação ao longo do processo de aprendizagem, evidenciando a natureza dinâmica e transformadora da educação.

Após essa breve análise da metodologia da pedagogia histórico-crítica, adentrar-se-á nos conceitos de sequência didática. Na próxima seção, busca-se explorar como os princípios fundamentais da pedagogia histórico-crítica podem ser aplicados de maneira prática e concreta na elaboração de estratégias de ensino. Conceituaremos sequência didática, como ferramenta pedagógica, visando organizar e planejar atividades que promovam a aprendizagem significativa dos alunos, conectando os conteúdos curriculares com suas vivências e realidades sociais. Nesse contexto, investigaremos como os conceitos e princípios da pedagogia histórico-crítica podem orientar a construção de sequências didáticas que favoreçam o desenvolvimento cognitivo, social e crítico dos estudantes.

4.6 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Entende-se por sequência didática (SD) uma organização de orientações pedagógicas cuidadosamente planejadas e articuladas, com o objetivo de promover uma aprendizagem significativa dos alunos em relação a temas ou conteúdos pré-estabelecidos. A sequência didática é estruturada por meio de etapas contínuas e progressivas, onde há uma clara intencionalidade em superar a simples transmissão de conhecimento. Pode-se então, buscando proporcionar uma aprendizagem que promova a compreensão e internalização dos conteúdos de forma mais eficaz, propor atividades que levem em consideração as características individuais dos alunos e o contexto social em que estão inseridos. Vê-se então que a sequência didática

> é um procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino-aprendizagem. É um procedimento para sistematização do processo ensino-aprendizagem, sendo de fundamental importância a efetiva participação dos alunos. Essa participação vai desde o planejamento inicial informando aos alunos o real objetivo da realização da sequência didática no contexto da sala de aula, até o final da sequência para avaliar e informar os resultados (OLIVEIRA, 2013, p.39-40).

Ainda conforme Oliveira (2013), no Brasil, a sequência didática começa a ser inserida no início da década de 90, e de forma semelhante, passou a ser analisada inicialmente no estudo da língua portuguesa.

Guimarães e Giordam (2013) destacam que sequência didática é um conjunto de atividades articuladas e organizadas de forma sistemática, em torno de uma problematização central.

Zabala (1998) destaca que a organização articulada das atividades é o fator distintivo das metodologias, e que o primeiro aspecto característico de um método é a ordem em que as atividades são propostas. Ele ressalta que a fragmentação da prática educativa apresenta um certo grau de artificialidade, o que é explicável pela dificuldade em encontrar um sistema interpretativo adequado que permita a análise conjunta de todas as variáveis presentes nos processos educativos.

Conforme Zabala (1998), uma sequência didática é composta por uma série ordenada e articulada de diferentes atividades, sendo suas formas de articulação um dos traços diferenciais que determinam a especificidade de muitas propostas didáticas. Na abordagem proposta por Zabala (1998), há uma clareza na estrutura da sequência didática, o que permite que alunos e professores tenham objetivos definidos desde o princípio da execução. Essa organização cuidadosa proporciona uma orientação precisa ao longo do processo de ensino e aprendizagem, facilitando o acompanhamento e a compreensão das atividades propostas. Na (SD) proposta pelo autor, com intuito de validar a sequência, pode-se trazer questionamentos,

- Que possam determinar os conhecimentos anteriores que cada aluno possui em relação aos novos temas de aprendizado.
- Cujos conteúdos sejam apresentados de maneira que sejam relevantes e práticos para os alunos.
- Que possam verificar se estão alinhadas com o nível de maturidade de cada estudante.
- Que sejam metas desafiadoras, mas alcançáveis para o aluno, considerando suas habilidades.
- Que estimulem um despertar cognitivo e incentivem a atividade mental do aluno.
- Que auxiliem o aluno a desenvolver habilidades de aprendizagem que o capacitem a se tornar mais autônomo em seu processo educacional.

Diante do exposto, ao elaborar uma sequência didática, é imprescindível considerar aspectos que promovam uma aprendizagem significativa, assegurando uma construção sistemática dos conceitos para que os alunos possam compreender progressivamente os conteúdos abordados. Além disso, é fundamental incentivar ativamente a participação dos alunos no processo de ensino-aprendizagem, promovendo atividades que estimulem o diálogo, a colaboração e o protagonismo dos estudantes. É essencial reconhecer e valorizar a diversidade presente na turma, adaptando as estratégias de ensino para atender às diferentes necessidades e ritmos de aprendizagem de cada aluno. O docente deve criar um ambiente propício para uma aprendizagem significativa, oferecendo desde um espaço acolhedor, estimulante e desafiador até atividades que permitam aos alunos construir e explorar conceitos de forma autônoma e crítica. Ao considerar esses aspectos, o professor pode desenvolver ações pedagógicas que valorizem o aprendizado e a heterogeneidade das turmas.

Então, diante de tantas variáveis externas que influenciam o processo da arte de ensinar, como direcionar a escolha da sequência didática. De acordo com Zabala (2018), há três tipos diferentes de sequências didáticas:

- A sequência didática conceitual.
- A sequência didática procedimental.
- A sequência didática atitudinal.

Compete ao professor, conforme os objetivos que almeja atingir, identificar qual sequência se adéqua melhor a cada turma. No entanto, é importante destacar que existe uma correlação entre elas, uma vez que estão fundamentadas nos princípios do aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a conviver e aprender a ser.

De acordo com o autor, os conteúdos atitudinais englobam a formação de atitudes e valores em relação à informação recebida, com o objetivo de estimular a intervenção do aluno em sua realidade, promovendo a reflexão sobre suas próprias ações e o desenvolvimento em contextos diversos. Por sua vez, os conteúdos conceituais dizem respeito à construção ativa de habilidades intelectuais para manipular símbolos, imagens, ideias e representações, permitindo a organização das realidades. Nesse contexto, a aprendizagem de conceitos e princípios assume um papel central. Os conceitos representam conjuntos de fatos, objetos ou símbolos com características comuns, enquanto os princípios dizem respeito às relações e regularidades presentes nas mudanças e interações observadas. Os conteúdos procedimentais, como sugere Zabala (1998), abrangem uma série de ações coordenadas e direcionadas para alcançar um objetivo. Essas ações englobam atividades como leitura, desenho, cálculo, tradução, recorte, salto, inferência, entre outras. Segundo o autor, os conteúdos procedimentais compreendem todas as aprendizagens que envolvem uma sequência de ações organizadas e orientadas para alcançar um determinado propósito.

Validar uma sequência didática envolve um processo cuidadoso que leva em consideração várias possibilidades e variáveis. É fundamental seguir algumas etapas para garantir a eficácia e a adequação da sequência didática ao contexto educacional e aos objetivos de ensino.

Conforme Guimarães e Giordam (2013) existem diversas abordagens teóricas para a elaboração e validação de sequências didáticas utilizadas no ensino. Entre elas, destacam-se a Engenharia Didática, as Teacher Learning Sequences (TLS), a Pesquisa em Design Educacional e o Processo EAR (Elaboração, Aplicação, Reelaboração).

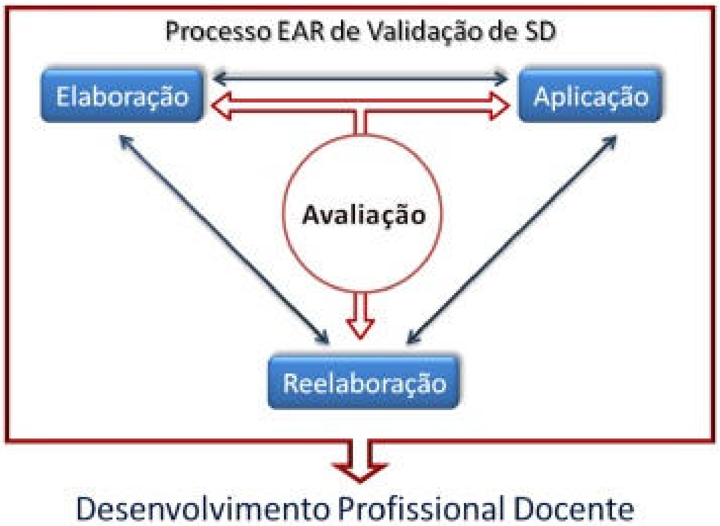
Nesse trabalho, com objetivo de delimitação da execução da atividade, focaremos na validação da sequência teorizada pelo processo EAR. Todavia, apesar de discorrer sobre o processo EAR, evidencio que o objeto deste capítulo é uma proposta de sequência didática, e em assim sendo, apenas a etapa da elaboração foi implementada na proposta.

Para Guimarães e Giordam (2013), o processo EAR representa uma abordagem para desenvolver e validar Sequências Didáticas por meio de uma análise sistemática e avaliações contínuas de todos os elementos que compõem a sequência, incluindo seu contexto de aplicação, os resultados obtidos e sua integração com o plano anual de ensino da instituição escolar.

Conforme Figura 47, os autores citados acima indicam que processo se inicia com a fase de elaboração, que consiste em planejar e organizar a (SD) segundo os elementos:

- Título.
- Público Alvo.
- Problematização; Objetivo Geral.
- Objetivos Específicos.
- Conteúdos.
- Dinâmica; Avaliação.
- Referências Bibliográficas e Bibliografia Utilizada.

Figura 47 – Representação esquemática do processo EAR.



Fonte: (GUIMARÃES; GIORDAN, 2013).

Buscando uma base sólida e estruturada para o desenvolvimento e implementação de atividades nas sequências didáticas, Guimarães e Giordam (2013) disponibilizam um "*framework*" (Figura 48) para uma sequência didática.

Figura 48 – *framework* de implementação de uma sequência didática.

Título:			
Público Alvo			
Caracterização dos Alunos		Caracterização da Escola	Caracterização da Comunidade Escolar
Problematização:			
Objetivo Geral:			
Metodologia de Ensino			
Aulas	Objetivos Específicos	Conteúdos	Dinâmica das Atividades
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
Avaliação:			
Bibliografia:	Referencial Teórico:		
	Material Utilizado:		

Fonte:(GUIMARÃES; GIORDAN, 2013).

Na fase da elaboração, na validação de uma sequência didática, os professores, fundamentados em uma teoria que orienta o processo de aprendizagem dos alunos, exploram diferentes recursos e estratégias pedagógicas que serão aplicadas na sequência didática. O docente realiza uma análise buscando selecionar e adaptar as atividades de acordo com os objetivos educacionais e as características que desejam alcançar. Guimarães e Giordan (2013) sugerem que na criação da sequência didática, dentro do processo EAR, faz-se mister seguir uma base teórica que guie as ações do professor e suas estratégias de ensino. Propõem ainda um instrumento para desenvolver sequências didáticas baseado na abordagem sociocultural, na qual o aluno incorpora conhecimentos por meio de interações sociais e com os elementos culturais, sendo mediado por ferramentas culturais.

A fase da aplicação, na validação de uma sequência didática, do processo EAR,

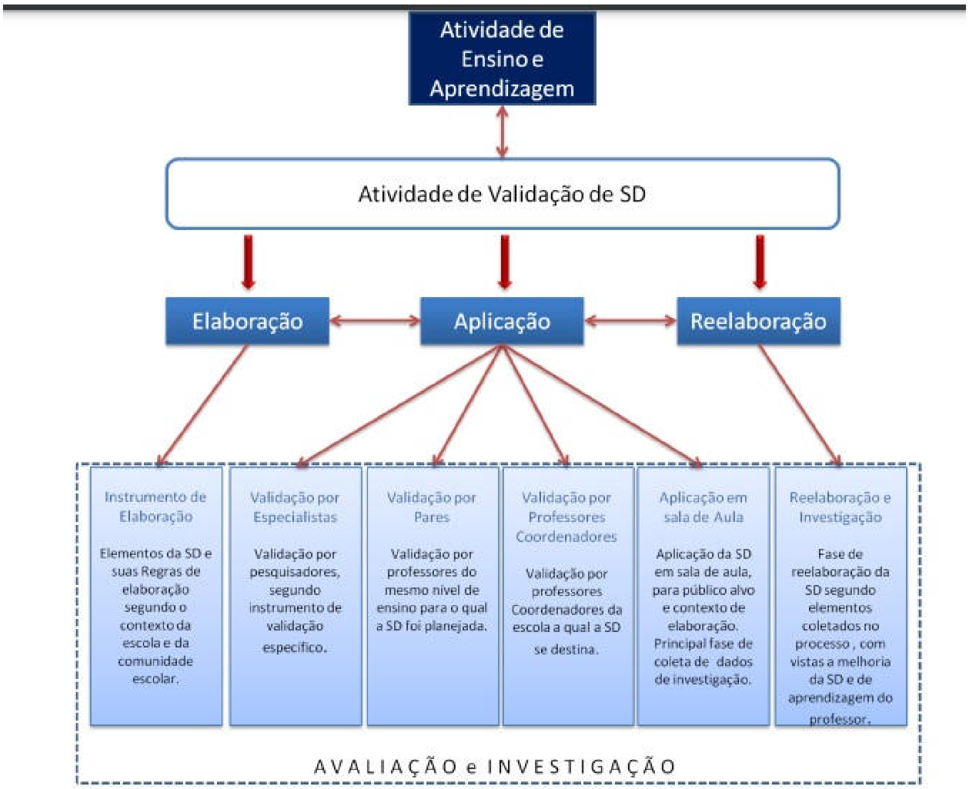
> é composta por quatro etapas. Sendo três etapas de validação a priori, realizadas segundo instrumentos de validação específicos e uma etapa na qual a SD é desenvolvida em sala de aula, esta última constitui a experimentação no processo de validação. Em cada uma das etapas a SD pode e deve ser revista pelo professor como forma de validação da SD (GUIMARÃES; GIORDAN, 2013, p. 5)

A fase de reelaboração, na validação de uma sequência didática, do processo EAR,

> o professor, de posse das informações das fases anteriores pode confrontar suas percepções e objetivos quanto à elaboração da SD, da análise a priori e os dados da experimentação. A confrontação dos resultados representa o fechamento do processo cíclico de validação. É quando o professor retoma a elaboração, mas munido de informações e experiências importantes no sentido de aprimorar a SD e sua ação docente (GUIMARÃES; GIORDAN, 2013, p. 5).

Na imagem abaixo, temos posse de um fluxograma representando as fases no processo de validação de uma (SD).

Figura 49 – Fases do processo de validação de (SD).



Fonte: (GUIMARÃES; GIORDAN, 2013).

Vê-se então, nesse processo de validação de uma sequência didática, possibilidade de facilitar a interação dinâmica entre os processos mentais e práticos, característicos do ambiente de sala de aula ou das situações de ensino e aprendizagem. Desta forma, na próxima seção, tomando como referencias as discussões elucubradas, proporemos uma sequência didática ancorada nos pressupostos teóricos da pedagogia histórico-crítica, objetivando obter ferramentas necessárias para o ensino das cônicas e suas aplicações no cotidiano.

4.6.1 Entrelaçando a metodologia da Pedagogia Histórico-Crítica com Sequência Didática

Nesta subseção, como objeto central deste trabalho, apresentar-se-á uma sequência didática ancorada na metodologia da pedagogia histórico-crítica.

A proposta inicial deste trabalho era conduzir uma pesquisa qualitativa, elaborar e aplicar sequências didáticas, coletar e tabular os resultados e, posteriormente, tirar conclusões sobre a viabilidade da execução da (SD). No entanto, problemas tanto externos quanto internos à unidade escolar resultaram na diminuição do número de turmas, especialmente no ensino médio. O autor, que é professor pesquisador, possui uma carga horária de trabalho de 40 horas semanais distribuídas em dois turnos, matutino e vespertino. Nessas duas jornadas, só existem turmas do ensino fundamental 2, o que impacta diretamente na impossibilidade de aplicação da sequência didática, dada a densidade dos conteúdos abordados. Assim, este trabalho assume novos contornos, transformando o que seria uma aplicação em uma proposta de sequência didática a ser implementada em turmas de segundo ou terceiro ano do ensino médio.

Construção da sequência didática

Apresentar-se-á uma discussão prévia para a futura elaboração da sequência didática, que será posteriormente incluída no apêndice. Neste momento, é essencial apresentar uma abordagem que conecte os pressupostos teóricos da pedagogia histórico-crítica à implementação da sequência didática.

1. Dados catalográficos da Unidade Escolar:

Colégio Estadual Professora Maria Odette Pithon Raynal, localizado no bairro de paripe, subúrbio ferroviário, município de Salvador, BA.

2. Caracterização do espaço físico da Unidade Escolar:

O colégio possui doze salas de aula, um laboratório de informática e uma quadra de esportes.

3. Título: Bilhar elíptico, vamos jogar?

4. Público Alvo:

Alunos do segundo ou terceiro ano do ensino médio.

5. Conteúdo:

Elipse e suas propriedades.

6. Objetivo Geral: Possibilitar aos alunos uma compreensão dos conceitos da elipse e sua aplicação prática.

7. Objetivos Específicos:

Compreender os conceitos fundamentais relacionados à geometria das cônicas, em particular, da elipse.

Investigar as aplicações práticas do bilhar elíptico em situações do cotidiano.

8. Avaliação Diagnóstica:

Aqui, conforme Gasparin (2012), a prática social entra em cena através do *conhecimento de síncrese* do aluno. Nesse momento, o professor deverá conduzir as perguntas e questionamentos a respeito do título da (SD).

Para implementar no ensino da elipse e do bilhar elíptico, a *prática social inicial* proposta por Gasparin (2012), o professor poderá elencar perguntas que podem ser utilizadas para guiar a discussão e promover a reflexão sobre os conceitos da elipse e do bilhar elíptico. Nesse sentido pode-se indagar;

- O que vocês sabem sobre elipses? Onde elas aparecem na natureza ou em situações do dia a dia?
- Vocês já ouviram falar sobre bilhar elíptico? O que vocês sabem sobre esse jogo?
- Como vocês acham que as características da elipse podem influenciar o jogo de bilhar elíptico?
- Será que a construção de uma mesa de bilhar elíptica em miniatura pode nos ajudar a compreender melhor as propriedades da elipse?

As perguntas mencionadas acima visam estimular a curiosidade dos alunos, promover o diálogo e criar um ambiente propício para a exploração e compreensão das propriedades da elipse e sua relação com o bilhar elíptico, objetivando identificar o nível de compreensão prévia dos alunos sobre o conceito de elipse, suas propriedades e aplicações, bem como diagnosticar possíveis dificuldades dos alunos em relação ao tema da elipse.

9. Problematização:

Os conceitos e definições da elipse fortalecem a aprendizagem no processo de construção da mesa de bilhar elíptico?

Chegado o momento em que o professor, de posse da sua liderança, buscará caminhos para discutir, indagar e explorar os conceitos e conteúdos abordados na prática social. Aqui, o professor deve dirimir as dúvidas dos alunos encontradas na prática social. O que antes era uma abordagem mais informal, passa a ter uma dimensão mais teórica.

Faz-se necessário que os alunos sejam desafiados a refletir sobre uma situação ou problema real relacionado ao conteúdo que será ensinado. Perguntas abertas que estimulam o pensamento crítico e a investigação podem ser desenvolvidas a título de considerar possíveis soluções para o problema.

Então o professor pode utilizar diferentes recursos para facilitar a percepção do conceito e aplicação da elipse no cotidiano dos alunos, podendo;

- Disponibilizar vídeos que abordem, de forma ainda menos densa, os conceitos de elipse.
- Imagens de elipse e suas inserções no cotidiano.
- Exemplo de construção (vídeos educacionais) de uma mesa de bilhar elíptico.

10. Instrumentalização

10.1 Conteúdos a serem discorridos na instrumentalização:

- Elipse e seus elementos.
- As propriedades da simetria e da reflexão da elipse.
- Forma canônica da elipse.
- Esboço da elipse.

O professor então orienta e explora;

- Definição de elipse, seus elementos e suas propriedades.
- Demonstrações das propriedades inerentes ao estudo da elipse correlacionando os conceitos a serem aplicados na construção e exploração do jogo do bilhar elíptico.

Como parte integrante do processo de aquisição de conhecimento nessa etapa da (SD), recursos tecnológicos como software dinâmico ou jogos didáticos ou atividades práticas podem ser usados objetivando fortalecer o processo de ensino aprendizagem.

Nessa etapa, tanto professor quanto alunos desempenham papéis importantes. O professor, estimulando o pensamento crítico nos alunos através do diálogo e do desenvolvimento da teoria, favorece, nessa troca de experiências, o processo de aquisição do saber.

10.2 Catarse

Nesta etapa, espera-se que o aluno tenha entendido o propósito das questões das etapas anteriores bem como compreendido conceitos discutidos. A partir da compreensão consolidada, além de aplicar o que aprendeu espera-se que ele refita sobre a possibilidade de aplicações da elipse no cotidiano, conectando teoria e prática. A catarse deve preparar o aluno para usar seu conhecimento de forma investigativa.

10.3 Síntese mental do aluno

Chegado então o momento para que o aluno demonstre o que aprendeu. O professor, através de diálogo ou outros instrumentos pode constatar o conteúdo aprendido.

10.4 Expressão da síntese - Avaliação

A expressão da síntese, após elucidadas as etapas anteriores da metodologia de Gasparin (2012), pode ocorrer a partir de diversos instrumentos avaliativos, tais quais: uma prova dissertativa, objetiva, entrevista, seminário ou sequência didática, dentre outros.

Em particular, nesta dissertação, com o objetivo de dar corpo ao objeto central do trabalho, que é uma sequência didática ancorada na metodologia da pedagogia histórico-crítica, será proposta uma sequência didática abordando uma possível construção de uma mesa de bilhar elíptico, objetivando a verificação da propriedade da reflexão e de que forma essa propriedade influencia no jogo.

Para construir uma mesa de bilhar elíptico, inevitavelmente precisamos elucubrar sobre as definições, os conceitos e proposições sobre concernentes à elipse. Essas ações já estão pacificadas nas etapas anteriores (prática social inicial, problematização e instrumentalização).

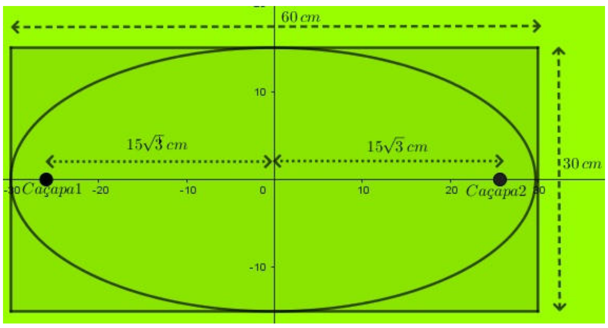
Como a ideia inicial não é a construção em si da mesa de bilhar elíptica e sim a verificação das propriedades dessa cônica, adquiriremos uma mesa de bilhar infantil, convencional, cujas medidas do modelo que usaremos são;

Tamanho da Mesa: 64 *cm* de comprimento x 36,5 *cm* de largura e 14,5 *cm* de altura.

Área de circulação das bolinhas: 61 *cm* de comprimento x 31 *cm* de largura e 1,5 *cm* de altura (distância entre o piso de circulação das bolas e a borda da mesa). As bolas têm raio de 1,5 *cm*.

A seguir, temos um molde[1] de mesa de bilhar elíptico que será confeccionada por um marceneiro e encaixada sobre a mesa adquirida. Após confecção do molde a peça será forrada com o mesmo tecido da peça original e o marceneiro fará, com um instrumento adequado, os furos das caçapas na mesa de bilhar comprada de tal forma que coincida com as caçapas projetadas no molde da Figura 50.

Figura 50 – Modelo de mesa para bilhar elíptico.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

.

A altura da borda da elipse deverá coincidir com a altura da área de circulação das bolinhas. Esses detalhes são necessários para que as propriedades, conforme discorridos na seção sobre a reflexão da elipse, sejam preservadas.

Caso necessário, em vez de usar o molde da mesa elíptica acima, pode-se construir facilmente, com lápis, barbante e prego (Figura 51), uma elipse conforme passos abaixo!

1. Em uma prancha de madeira de 60 *cm* x 30 *cm*, considere a origem o centro da prancha e marque-a.

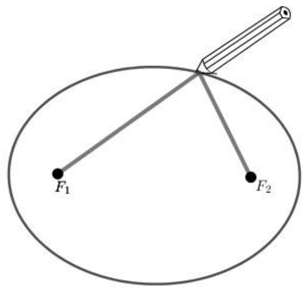
2. Trace o sistema de coordenadas paralelo às bordas da mesa, tendo o centro da prancha como origem.

[1] Usou-se o software dinâmico *GEOGEBRA* para a construção do modelo de mesa.

3. Coloque um prego sobre os focos, F_1 e F_2, no eixo X, de tal forma que distem $30\sqrt{3}cm$, sendo a origem o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$.

4. Corte um barbante que tenha comprimento maior que a distância dos pregos (focos) e amarre-os em cada foco. Após simples cálculos, para que a elipse caiba na mesa de bilhar adquirida, usaremos o fio de tal forma que após amarrados o comprimento seja de 60 cm. Pegue um lápis e estique o fio, mantenha-o sempre esticado e gire ao redor dos pregos. Tem-se então o molde da elipse desejada. O método descrito acima é chamado de método jardineiro.

Figura 51 – Elipse com lápis e barbante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Como instrumento da expressão da síntese, poder-se-á perguntar ao aluno

1. Se o centro da elipse é a origem e a interseção da elipse com o eixo focal são os pontos $A_1 = (-30,0)$ e $A_2 = (30,0)$, qual o valor da distância focal $2a$? E então, qual o valor de a?

2. Se o centro da elipse é a origem e a interseção da elipse com a reta não focal são os pontos $B_1 = (-15,0)$ e $B_2 = (15,0)$, qual o valor do comprimento do eixo não focal $2b$? E então, qual o valor de b?

3. Achado os valores de a e b, calcule o valor de c e em seguida calcule a distância focal. Quais os valores dos focos F_1 e F_2?

4. Qual a equação da elipse em sua forma canônica?

Para fortalecer ainda mais a internalização dos conceitos, sugere-se ao aluno fazer uma busca no endereço eletrônico, https://www.atractor.pt/mat/BilharesConicos/, com o objetivo de fazer uma emulação em uma mesa de bilhar elíptica.

Como atividade exploratória, pede-se que ele coloque a bolinha em um dos focos e faça a jogada. Em seguida, que ele coloque a bolinha em qualquer posição na mesa de tal forma que quando ele efetuar a jogada a bolinha passe pelo foco. O que se pode concluir?

11. Prática social final

Neste momento os alunos não apenas devem ter consolidado os conhecimentos adquiridos no desenvolvimento da (SD). Espera-se que eles reflitam criticamente sobre os conteúdos estudados, possibilitando uma visão mais densa dos conceitos de tal forma que tenham condições de analisar criticamente como esses conceitos se aplicam na sua prática social.

É uma etapa que não se encerra. Após aquisição das aprendizagens, tanto aluno quanto o professor já não são mais os mesmos. Já possuem instrumentos para ressignificarem os conceitos que ainda não estavam amadurecidos, essencialmente nos alunos, na prática social inicial.

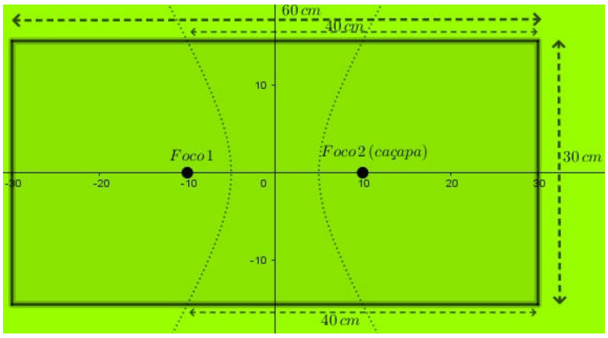
É possível aplicar, fora do ambiente escolar, o conteúdo estudado?

O que eu quero, o que eu pretendo, o que eu desejo, podem ser perguntas direcionadas aos alunos como forma de verificar as ações das aprendizagens desenvolvidas no processo de aquisição do conhecimento.

Na elaboração das propostas das sequências didáticas sobre hipérbole e parábola, dentro da perspectiva metodológica da didática para a pedagogia histórico-crítica, os conceitos inerentes à prática social inicial, problematização, instrumentalização, catarse e prática social final serão semelhantes à proposta de sequência didática desenvolvida para a elipse. Assim, não será desenvolvida uma proposta de sequência didática separada para cada uma dessas cônicas. Em vez disso, será realizado o processo de moldagem para a mesa de bilhar hiperbólico e parabólico, pois a abordagem pedagógica seria feita aproveitando os mesmos princípios e estratégias de ensino-aprendizagem utilizados na sequência anterior.

Molde para a mesa de bilha hiperbólico (Figura 52):

Figura 52 – Modelo de mesa para bilhar hiperbólico .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Aqui utilizaremos uma mesa de bilhar igual a usada no caso da orientação para confecção da mesa de bilhar elíptico.

Tamanho Da Mesa: 64 cm de comprimento x 36,5 cm de largura e 14,5 cm de altura.

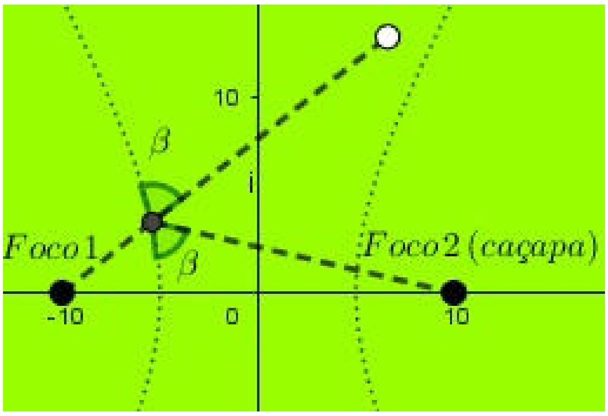
Área de circulação das bolinhas: 61 cm de comprimento x 31 cm de largura e 1,5 cm de altura (distância entre o piso de circulação das bolas e a borda da mesa). As bolas têm raio de 1,5 cm.

Observação: No ramo da hipérbole próximo ao foco 1, será construído a borda da mesa de bilhar hiperbólico. No ramo 2 não haverá construção da borda pelo marceneiro, apenas será feita uma marcação da hipérbole no molde do tecido que ficará sobre o piso original da mesa adquirida.

Todas as caracterizações de tecidos e altura da borda da hipérbole seguirão as mesmas diretrizes da elipse.

Espera-se que, após a construção e validação da sequência didática, o aluno seja capaz de verificar a propriedade da reflexão da hipérbole, conforme ilustrado na Figura 53.

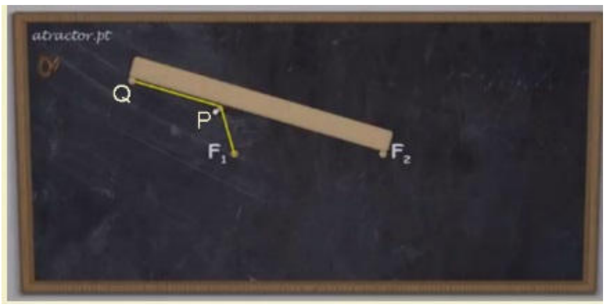
Figura 53 – Ilustração da propriedade da reflexão na mesa de bilhar hiperbólico.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Caso necessário, em vez de usar o molde da mesa hiperbólica, pode-se construir facilmente uma hipérbole, com lápis, régua e barbate (Figura 54), conforme passos abaixo:

Figura 54 – Hipérbole régua e barbante.



Fonte: (ATRACTOR, 2017).

1. Em uma prancha de madeira de 60 cm x 30 cm, considere a origem o centro da prancha e marque-a.

2. Trace o sistema de coordenadas paralelo às bordas da mesa, tendo o centro da prancha como origem.

3. Considere os pregos (focos F_1 e F_2) distando 20 cm e a origem sendo o centro da mesa.

4. Fixe uma das extremidades de uma régua num dos focos.

5. Fixe uma extremidade de um barbante, de comprimento igual ao comprimento da régua menos $2a$ (distância entre os focos), na outra extremidade da régua e a outra extremidade do barbante no outro foco.

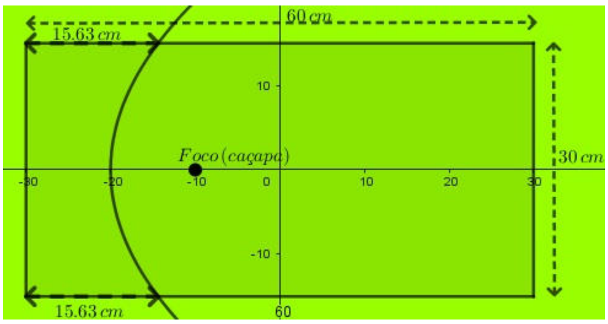
6. Estique o barbante com uma caneta de tal forma que ela encoste na régua.

7. Gire a régua em torno do foco no qual ela foi fixada.

Observação: O outro ramo da hipérbole obtém-se realizando os mesmos passos, trocando, obviamente, os focos.

Molde para a mesa de bilha parabólico (Figura 55).

Figura 55 – Modelo de mesa para bilhar parabólico.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Aqui, novamente, utilizaremos uma mesa de bilhar igual a usada no caso da orientação para confecção da mesa de bilhar elíptico.

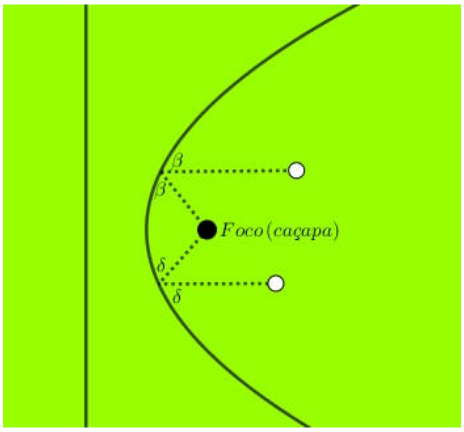
Tamanho da mesa: 64 cm de comprimento x 36,5 cm de largura e 14,5 cm de altura.

Área de circulação das bolinhas: 61 cm de comprimento x 31 cm de largura e 1,5 cm de altura (distância entre o piso de circulação das bolas e a borda da mesa). As bolas têm raio de 1,5 cm.

Novamente todas as caracterizações de tecidos e altura da borda (parábola) seguirão as mesmas diretrizes da elipse e hipérbole.

Espera-se que, após a construção e validação da sequência didática, o aluno seja capaz de verificar a propriedade da reflexão da parábola (Figura 56) e que compreenda na catarse proposta por Gasparin (2012), o porquê da bolinha, quando lançada perpendicular à diretriz, isto é, paralela à reta focal, é endereçada ao foco (caçapa).

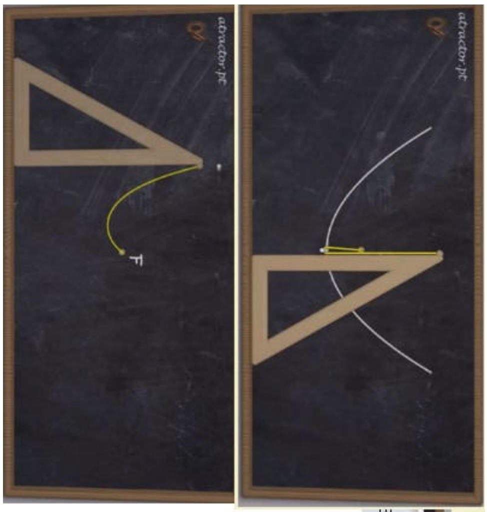
Figura 56 – Ilustração da propriedade da reflexão na mesa de bilhar parabólico.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Caso necessário, em vez de usar o molde da mesa parabólica, pode-se construir facilmente uma parábola, com lápis, régua e barbante (Figura 57), conforme passos abaixo:

Figura 57 – Construção da parábola com lápis, régua e barbante.



Fonte: (ATRACTOR, 2017).

1. Em uma prancha de madeira de 60 *cm* x 30 *cm*, considere a origem o centro da prancha e marque-a.

2. Trace o sistema de coordenadas paralelo às bordas da mesa, tendo o centro da prancha como origem.

3. Considere a diretriz um dos lados da prancha e fixe o prego (foco F) na reta focal (eixo X) distando 20 *cm* da diretriz e tome a origem como sendo o centro da prancha.

4. Coloque um esquadro com um lado encostado sobre a reta diretriz.
5. Seja o comprimento do barbante igual ao comprimento do lado do esquadro perpendicular a diretriz.
6. Fixe a extremidade do barbante no foco e a outra extremidade na ponta do esquadro que não está encostado na diretriz.
7. Estique o barbante com uma caneta até que ela fique encostada no lado do esquadro perpendicular à reta diretriz.
8. Deslizando-se o esquadro na reta diretriz, tem-se uma parte da parábola.

5 CONCLUSÃO

É notório que o contexto histórico tem uma influência na construção do conhecimento e que as interações sociais dinamizam o processo de aquisição da aprendizagem. Ao passo que a sociedade se desenvolve por meio das relações sociais, torna-se imperativo no âmbito educacional desenvolver práticas pedagógicas que considerem esse contexto social, objetivando garantir uma aprendizagem satisfatória.

Percebe-se que o estudo das cônicas sob uma abordagem histórica, geométrica e analítica ainda carece de uma exploração mais aprofundada nos livros didáticos de matemática, sobretudo nos livros da educação básica. Vê-se frequentemente nos livros disponíveis para o ensino desse conteúdo que não há um direcionamento para uma perspectiva ampla, social e integrada das cônicas.

Pensando no ensino das cônicas em turmas do ensino médio, busca-se através deste trabalho, a aplicação de uma sequência didática ancorada na metodologia da pedagogia histórico-crítica como estratégia para dinamizar as aulas e facilitar a aquisição de conhecimento pelos alunos. Nesse sentido, espera-se que a implementação de sequências didáticas alinhadas a essa abordagem possa promover um ambiente de aprendizagem mais prazeroso e eficaz.

Para validar essa proposta, sugere-se a realização de pesquisas futuras em turmas de segundo ou terceiro ano do ensino médio, com a posterior tabulação e análise dos dados obtidos. Esse processo permitirá verificar empiricamente a eficácia da abordagem proposta, contribuindo para o aprimoramento contínuo das práticas educacionais e para a construção de uma educação que tome como ponto de partida o cotexto social dos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ATRACTOR. *Construção da parábola*. 2017. Acesso em 28 de março de 2024. Disponível em: <https://www.atractor.pt/geral/temp/ConstrucoesConicas.html>.

BOULOS, P.; CAMARGO, I. de. *Geometria analítica*. [S.l.: s.n.], 1987. v. 4533. 004 p.

DARELA, E.; CARDOSO, M. C. *História da matemática*. [S.l.]: UnisulVirtual, 2011.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. *Geometria analítica*. [S.l.: s.n.], 2017.

EVES, H. *Introdução à história da matemática, tradução: Hygino H*. [S.l.: s.n.], 2004.

GASPARIN, J. L. *Uma didática para a pedagogia histórico-crítica*. [S.l.]: Autores Associados, 2012.

GUIMARÃES, Y.; GIORDAN, M. Elementos para validação de sequências didáticas. *Encontro Nacional de Pesquisa Em Educação Em Ciências*, v. 9, p. 1–8, 2013.

LINO, P. S. C. *Apolônio de Perga*. 2018. Acesso em 14 de março de 2024. Disponível em: <https://fatosmath.wordpress.com/2018/01/13/apolonio-de-perga/>.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Documento oficial. Acesso em: 17 de março de 2024. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>.

MOL, R. S. *Introdução à história da matemática*. [S.l.: s.n.], 2013.

OLIVEIRA, M. M. de. *Sequência didática interativa no processo de formação de professores*. [S.l.]: Editora Vozes Limitada, 2013.

PETENUCCI, M. C. *Desvelando a pedagogia histórico-crítica*. [S.l.: s.n.], 2008.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. *Tópicos de história da matemática*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

SAVIANI, D. *Pedagogia histórico-crítica: primeiras aproximações*. [S.l.]: Autores associados, 2021.

Apêndices

APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA NA PERSPECTIVA DA PEDAGOGIA HISTÓRICO-CRÍTICA

1. Dados catalográficos da Unidade Escolar:

- Instituição: Colégio Estadual Professora Maria Odette Pithon Raynal, localizado no bairro de Paripe, subúrbio ferroviário, município de Salvador, BA.
- Disciplina/área de conhecimento: Matemática e suas tecnologias.
- Professor (a): Glaidon Farias Sudário da Silva.
- Ano letivo ______________ Bimestre ______________ Duração hora/aula: ______________

2. Caracterização do espaço físico da Unidade Escolar:

O colégio possui doze salas de aula, um laboratório de informática e uma quadra de esportes.

3. Título da unidade de conteúdo:

Elipse e suas propriedades: Bilhar elíptico, vamos jogar?

4. Público Alvo:

Alunos do segundo ou terceiro ano do ensino médio.

6. Objetivo Geral:

Possibilitar aos alunos uma compreensão dos conceitos da elipse, a fim de verificá-los em situações do cotidiano.

7. Objetivos Específicos:

- Compreender os conceitos fundamentais relacionados às propriedades da elipse, em particular, a propriedade refletora, a fim de potencializar a ludicidade na mesa de bilhar elíptico.
- Investigar as aplicações práticas do bilhar elíptico em situações do cotidiano objetivando correlacionar conceitos inerentes às propriedades da elipse.

8. Avaliação Diagnóstica (prática social como ponto de partida da prática educativa):

Diálogo com os alunos - conhecimento de síncrese!

- O que vocês sabem sobre elipses? Onde elas aparecem na natureza ou em situações do dia a dia?
- Vocês já ouviram falar sobre bilhar elíptico? O que vocês sabem sobre esse jogo?
- Como vocês acham que as características da elipse podem influenciar o jogo de bilhar elíptico?
- Será que a construção de uma mesa de bilhar elíptica em miniatura pode nos ajudar a compreender melhor as propriedades da elipse?

9. Problematização - problemas trazidos pela prática social em relação aos conteúdos da aula:

9.1 Sugestões direcionadas pelo professor para os possíveis problemas originados na prática social inicial:

- A verificação de figuras elípticas ajudam a compreender os conceitos dessa curva? Por quê?
- A prática da interação social pode facilitar a socialização do conhecimento matemático por meio de jogos? De que maneira?

9.2 Dimensão teórico-prática do conteúdo.

- Conceitual/científica: O que é elipse?
- Educacional: A prática lúdico-educativa é disseminada nos ambientes escolares com o objetivo de fortalecer o aprendizado?
- Prática: De que forma os novos conteúdos aprendidos podem ser postos em prática além da sala de aula?

10. Instrumentalização.

10.1 Conteúdos a serem discorridos na instrumentalização:

- Elipse e seus elementos.
- As propriedades da simetria e da reflexão da elipse.
- Forma canônica da elipse.
- Esboço da elipse.

10.2 Ações didático-pedagógicas:

- Disponibilizar vídeos que abordem os conceitos de elipse.
- Disponibilizar imagens de elipse e suas inserções no cotidiano.
- Explorar exemplo de construção (vídeos educacionais) de uma mesa de bilhar elíptico.

10.3 Recursos materiais e humanos:

- Filmes.
- Livros.
- Periódicos.
- Vídeos.
- Internet.

11 Catarse - verificação da nova postura mental do aluno.

11.1 Síntese mental do aluno.

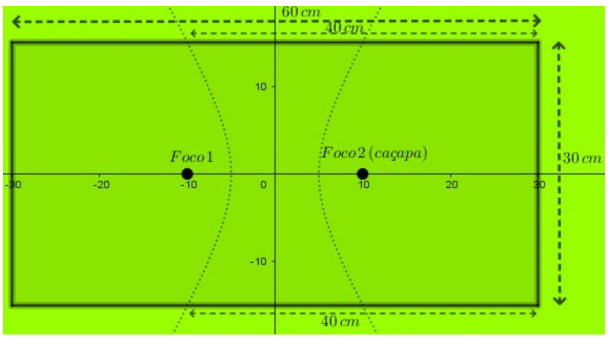
Verificar o conhecimento adquirido pelo aluno em relação aos conceitos sobre as cônicas por meio de interações informais entre professor e estudante, utilizando o diálogo para levantar questionamentos pertinentes.

11.2 Expressão da síntese - avaliação formal.

11.2.1 Construção da mesa de bilhar elíptico através dos passos:

- Aquisição de uma mesa de bilhar convencional com dimensões de: 64 cm de comprimento x 36,5 cm de largura e 14,5 cm de altura.
- Construção do molde de bilhar elíptico usando o *software GeoGebra* (ver Figura 58).

Figura 58 – Modelo de mesa para bilhar hiperbólico .



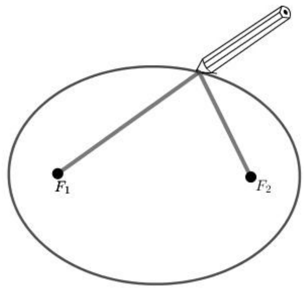
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

.

- Levar o molde ao marceneiro, solicitar a construção da mesa de bilhar elíptica e acoplar na mesa de bilhar adquirida de tal forma que um dos focos seja a caçapa e o que o outro fique apenas sinalizado.

11.2.1 Construção da mesa de bilhar elíptico através do método jardineiro descrito abaixo (Figura 59):

Figura 59 – Elipse com lápis e barbante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

- Em uma prancha de madeira de 60 *cm* x 30 *cm*, considere a origem o centro da prancha e marque-a.
- Trace o sistema de coordenadas paralelo às bordas da mesa, tendo o centro da prancha como origem.
- Coloque um prego sobre os focos, F_1 e F_2, no eixo X, de tal forma que distem $30\sqrt{3}cm$, sendo a origem o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$.
- Corte um barbante que tenha comprimento maior que a distância dos pregos (focos) e amarre-os em cada foco. Após simples cálculos, para que a elipse caiba na mesa de bilhar adquirida, usaremos o fio de tal forma que após amarrados o comprimento seja de 60 cm. Pegue um lápis e estique o fio, mantenha-o sempre esticado e gire ao redor dos pregos.

11.2.2 Aplicação das questões dissertativas:

- Se o centro da elipse é a origem e a interseção da elipse com o eixo focal são os pontos $A_1 = (-30,0)$ e $A_2 = (30,0)$, qual o valor da distância focal $2a$? E então, qual o valor de a?
- Se o centro da elipse é a origem e a interseção da elipse com a reta não focal são os pontos $B_1 = (-15,0)$ e $B_2 = (15,0)$, qual o valor do comprimento do eixo não focal $2b$? E então, qual o valor de b?

- Achado os valores de a e b, calcule o valor de c e em seguida calcule a distância focal. Quais os valores dos focos F_1 e F_2?
- Qual a equação da elipse em sua forma canônica?
- Na mesa de bilhar elíptico coloque a bolinha em um dos focos e direcione à caçapa. Em seguida, coloque a bolinha em qualquer posição na mesa de tal forma que ao efetuar a jogada a bolinha passe pelo foco sinalizado com força suficiente para tocar na borda da mesa e continue o movimento. Repita essas ações diversas vezes. O que se pode concluir?
- Após acessar o site https://www.atractor.pt/mat/BilharesConicos/, é possível fortalecer o processo de ensino-aprendizagem em atividades lúdicas? Justifique.

11. Prática social final - ponto de chegada da prática educativa.

Perguntar ao aluno:

A partir das etapas elucubradas e discorridas no processo de teorização das propriedades da elipse e suas aplicações na mesa de bilhar elíptico.

- É possível aplicar ou verificar, fora da escola, o conteúdo aprendido?
- O que você quer, pretende, deseja e gostaria que acontecesse no seu cotidiano a partir do conteúdo estudado?

12. Referências Bibliográficas.

ATRACTOR. **Construção da parábola**. 2017. Acesso em 28 de março de 2024. Disponível em: <https://www.atractor.pt/geral/temp/ConstrucoesConicas.html>.

BOULOS, P.; CAMARGO, I. de. **Geometria analítica**. CEP, v. 4533, p. 004, 1987.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

GASPARIN, J. L. **Uma didática para a pedagogia histórico-crítica**. [S.l.]: Autores Associados, 2012.

GUIMARÃES, Y.; GIORDAN, M. **Elementos para validação de sequências didáticas**. Encontro Nacional de Pesquisa Em Educação Em Ciências, v. 9, p. 1–8, 2013.